LA INVERSIÓN EN ACTIVOS REALES

COMO UNA OPCIÓN COMPUESTA

Amalia Rodrigo

WP-EC 2002-07

Correspondencia: Universitat de València. Departament de Finances Empresarials. Avda. Tarongers, s/n. 46071 Valencia (Spain). E-mail: Amalia.Rodrigo@uv.es

Editor: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.

Primera Edición Abril 2002

Depósito Legal: V-1484-2002

Los documentos de trabajo del IVIE ofrecen un avance de los resultados de las investigaciones económicas en curso, con objeto de generar un proceso de discusión previo a su remisión a las revistas científicas.

LA INVERSIÓN EN ACTIVOS REALES COMO UNA OPCIÓN COMPUESTA

Amalia Rodrigo

RESUMEN

El presente trabajo está inspirado en un proyecto de inversión pública que tiene como escenario el denominado *arco mediterráneo*. Se trata, concretamente, del estudio y valoración del proyecto de expansión de un puerto marítimo de gran importancia para la economía regional. La metodología de valoración empleada está basada en el análisis de los derechos contingentes utilizando argumentos de equilibrio. Esta metodología enfatiza la valoración de las oportunidades estratégicas u opciones reales que emergen con el desarrollo del proyecto de inversión. Las peculiaridades del mencionado proyecto lo hacen especialmente interesante, ya que reúne características de las organizaciones públicas y de las privadas. Entre las primeras se encuentra la existencia de un mercado regulado en precios. De las segundas proceden las figuras de sustitución del empleo de los recursos y de cesión o venta total o parcial de las instalaciones. La versatilidad del proyecto de inversión da lugar a un problema complejo que requiere resolver tres problemas de valoración de opciones: uno relacionado con la flexibilidad de invertir en la etapa de construcción, otro con la sustitución del uso de los recursos y un tercero, con la posibilidad de venta de parte de la futura inversión.

Palabras clave: *opciones reales, procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales*.

ABSTRACT

This paper treats of a public investment project in an important area named the mediterranean arc. Specifically, it is dedicated to design and value an expansion project of a shipping port. The valuation methodology is based on the contingent claims analysis, using equilibrium arguments. This methodology stresses the valuation related to strategic opportunities or real options which emerge with the development of the project. There are two significant characteristics in this project: First, the existence of a price regulated market because of the fact that the port is a public organisation, and second, the shipping port operates also as a private firm so it appears the existence of the substitution of resources employment and total o partial cession of the installations. The versatility of the investment project drives to a complex problem requiring resolve three option valuation problems, simultaneously.

Keywords: *real options, stochastic processes, differential equations*.

1. Introducción

El presente trabajo se enmarca en el área de las finanzas de empresa dedicada a la valoración de las inversiones productivas, con especial interés en el componente estratégico que existe en el caso objeto de estudio. Este campo de trabajo ha recibido un fuerte empuje académico en los últimos años, debido en buena medida a que constituye una fuente potencial para la aplicación de la Teoría de Valoración de Opciones (TVO). Siendo, hoy en día, una línea de trabajo conocida en los círculos académicos y en la práctica empresarial con el nombre de Opciones Reales.

La TVO, cuyos máximos representantes son Robert Merton (1973a) y Fischer Black y Myron Scholes (1973), ha marcado un hito en las finanzas modernas, especialmente en tiempo continuo. Surgida en el ámbito de los activos financieros derivados, pronto encontró aplicación a las finanzas de empresa (Myers 1977-1984, Smith 1979; Ruiz 1986).

Myers (1977) acuñó el término opciones reales para referirse a las oportunidades de crecimiento o inversión futura de la empresa. En general, este término engloba aquellos aspectos de carácter estratégico y operativo presentes en los proyectos de inversión real que proporcionan flexibilidad o discreccionalidad al proceso de toma de decisiones. Kester (1984) ponía de manifiesto cómo los directivos, en ocasiones basándose en el juicio y la intuición, recomendaban proyectos de inversión pese a tener un valor actual neto negativo porque constituían una plataforma para el desarrollo futuro de la empresa, aunque difícil de cuantificar. Desde la óptica de las opciones reales, un proyecto de inversión-plataforma es propiamente una cartera de opciones estratégicas que permite crear las condiciones necesarias para llevar a cabo la expansión de la empresa en el futuro. Dichas características estratégicas deben considerarse explícitamente en la valoración del proyecto de inversión inicial.

La literatura sobre opciones reales empezó a desarrollarse en la década de los ochenta, aplicándose a contextos de índole variada. Con relación a la valoración de proyectos de inversión destaca Tourinho (1979) quien analiza el valor de unas reservas de recursos naturales donde existe la opción de abandono temporal y definitivo de las mismas. En la misma línea y contexto se encuentran los trabajos de Brennan y Schwartz (1985), Paddock, Siegel y Smith (1988) y Dias y Rocha (1999). Este último, a diferencia de los anteriores que utilizan los argumentos de valoración por arbitraje como una extensión directa de la TVO, aplica un enfoque de programación dinámica recurriendo a argumentos de equilibrio, para valorar un contrato de concesión sobre un pozo petrolífero que incluye una opción de prórroga del vencimiento para la explotación de la concesión. Una opción que existe en todos los proyectos de inversión, excepto en las inversiones irreversibles, es la opción de abandono anticipado ante circunstancias adversas. Esta opción es analizada por Myers y Majd (1983), McDonald y Siegel (1985) y Olsen y Stensland (1988), entre otros. Salvo en mercados fuertemente competitivos donde retrasar la realización de una inversión puede dar lugar a una gran pérdida competitiva, es lógico pensar que la decisión de invertir no es de la forma "ahora o nunca", por el contrario la empresa dispone de cierto tiempo para obtener nueva información que permita desvelar ciertas incertidumbres o simplemente esperar a que mejoren las condiciones del entorno para tomar una decisión definitiva. Esta opción de diferir la realización de un proyecto de inversión es analizada por McDonald y Siegel (1986) y Pindyck (1991) para el caso de una inversión irreversible, y por Majd y Pindyck (1987) para el caso de un proyecto de inversión secuencial.

El presente trabajo, aunque en línea con los anteriores, presenta algunas novedades. En primer lugar, tratamos la valoración de un proyecto de inversión de iniciativa pública, en concreto, la expansión de un puerto marítimo donde, además, aparecen elementos propios de las organizaciones privadas, particularmente, la alternancia en el uso de los recursos y la venta total o parcial de las instalaciones. En segundo lugar, la incertidumbre proviene de la cantidad demandada de servicios portuarios y no de los precios que están regulados. En tercer lugar, empleamos un enfoque de equilibrio en lugar del enfoque de valoración por arbitraje, que se justifica por la ausencia de mercado para el activo subyacente (mercancías de diversa índole).

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en la sección dos se declara la motivación del mismo y en la sección tres se define el modelo de valoración que servirá de base a los problemas que se formulan en las secciones cuatro y cinco. Concretamente, la sección cuatro trata la flexibilidad en la etapa de construcción y la sección cinco los problemas de valoración encadenados que determinan el valor de la opción compuesta de invertir en el proyecto de ampliación. Finalmente, dedicamos un apéndice para una descripción algo más detallada de ciertos aspectos de los problemas planteados en las secciones anteriores.

2. Motivación del trabajo

La principal motivación de este trabajo reside en la formulación de un modelo *adhoc* para la valoración de un proyecto de inversión de iniciativa pública que apoya y favorece el desarrollo a medio y largo plazo de industrias del *arco mediterráneo* con fuerte actividad importadora y/o exportadora. El proyecto de inversión analizado es la ampliación de un puerto marítimo con carácter industrial que está bajo el control de la Autoridad Portuaria de Valencia (AP).

Con la ampliación se pretende crear la infraestructura portuaria necesaria para atender la creciente demanda de servicios de transporte marítimo que procede del área de influencia del puerto (*hinterland*). Las empresas de esta zona, que en agregado son fundamentalmente importadoras, pueden ser consideradas un mercado cautivo ya que dadas las características de las mercancías que transportan (aproximadamente un 0.6 del tráfico procede de la siderurgia de Sagunto), la vía marítima es el medio de transporte de menor coste. Por lo tanto, estas empresas representan clientes fieles del negocio portuario y no son objeto de competencia con otros puertos o con otros medios de transporte.

El proyecto de ampliación es definido como un proyecto de inversión secuencial donde, además de la flexibilidad inherente a la fase de construcción, emergen dos oportunidades estratégicas u opciones reales. Una vinculada a la sustitución del empleo de una parte de la actual infraestructura que alberga un tráfico residual (conocida como pantalán) que podría en el futuro ser dedicada al uso y disfrute del área metropolitana adyacente. Y otra vinculada al interés que el negocio portuario ha despertado en la iniciativa privada, y que podría formalizarse en un acuerdo de cesión entre la AP y un agente privado.

3. Modelo básico de valoración

En esta sección se definen los fundamentos del modelo de valoración que servirán de base para los problemas que se abordarán en las sucesivas secciones. El modelo de valoración está definido en tiempo continuo, en línea con los modelos de valoración de opciones. La incertidumbre en las variables de estado y de control es introducida a través de un proceso de difusión de Wiener. El valor se caracterizará como la solución de una ecuación en derivadas parciales, tratamiento habitual en la literatura sobre opciones reales.

El proyecto de inversión objeto de estudio está diseñado como un programa de decisiones secuenciales de inversión, que da lugar a un flujo continuo de inversión a lo largo de la etapa de construcción. Finalizada dicha etapa, el proyecto de inversión estará en condiciones de ser operativo y a partir de ese momento, denominado fecha de inicio de explotación, y hasta un momento final *T*, la empresa generará un flujo neto de caja continuo que dependerá de la demanda por importación y exportación de servicios de transporte marítimo (variable de estado), de los precios (regulados), de los costes (fijos y variables), de la imposición fiscal (Impuesto de sociedades) y, a través de ésta, de la depreciación del capital o amortización de los equipos industriales.

La nomenclatura empleada es la siguiente:

- $X_i(t)$: Demanda por importación ($i=1$) y exportación ($i=2$) de servicios de transporte marítimo en el momento t, medida en toneladas.
- P_i : Precio/Tonelada i.
- C_{vi}: Coste variable/Tonelada i.
- C_f: Coste fijo.
- $F(t)$: Flujo neto de caja en el momento t.
- $F_{DI}(t)$: Flujo neto de caja total después del impuesto de sociedades en el momento t.
- $I(t)$: Coste de la inversión realizada en el momento t.
- Q: Capacidad en toneladas de la actual infraestructura.
- $V_n(t)$: Valor neto contable de la inversión.
- t_o: Fecha de puesta en marcha del programa de inversiones.
- t_e: Fecha de inicio de la explotación.
- D: Amortización técnica de los equipos industriales.
- g: Tipo de gravamen del impuesto de sociedades.

La evolución temporal de la demanda de servicios de transporte marítimo puede expresarse como una ecuación diferencial estocástica de la forma más general:

$$dX_i = \mu_i\left(X_i, t\right)dt + \sigma_i\left(X_i, t\right)dtZ_i, \qquad i = 1,2 \tag{1}$$

El primer término de la ecuación representa el crecimiento esperado de la variable de estado, y el segundo término, la volatilidad de dicho crecimiento. dZ_i es un proceso estándar de Wiener, de media cero y desviación típica la amplitud del intervalo temporal, *dt*.

El flujo neto de caja total incremental antes del impuesto de sociedades en un momento cualquiera *t* tiene la siguiente expresión:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2} X_i(t) - Q\right)\frac{X_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} X_i(t)}\left(P_i - C_{vi}\right)1_{\left\{\sum_{i=1}^{2} X_i(t) > Q\right\}} - C_f \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que sólo existe obligación fiscal si el flujo de caja neto de la depreciación es positivo, el flujo neto de caja total después del impuesto de sociedades en un momento cualquiera *t* se expresará como:

$$F_{DI}\left(t\right) = F\left(t\right) - \max\left[g \cdot \left(F\left(t\right) - D\right), 0\right] \tag{3}$$

Por otra parte, el valor neto de los equipos industriales evolucionará negativamente en la cantidad de la amortización técnica, y expresamos este hecho con la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dV_n = -Ddt + \sigma_n\left(V_n, t\right)dZ_n \tag{4}$$

donde el término estocástico representa la incertidumbre técnica, no de mercado y por tanto sin remuneración, de la depreciación del capital.

El valor de la empresa en funcionamiento en el momento de inicio de la explotación, t_e, se define como la expectativa en dicho momento del valor actual del flujo neto de caja total después de impuestos, incluido el valor final de la inversión:

$$V\left(t_e\right) = E_e\left[V_n\left(T\right)e^{-\alpha\left(T - t_e\right)} + \int_{t_e}^{T} F_{DI}\left(t\right)e^{-\alpha\left(t - t_e\right)}dt\right], \tag{5}$$

donde α es el tipo de interés constante adecuado al riesgo de mercado del proyecto de inversión.

A través del lema de Ito puede obtenerse la ecuación diferencial estocástica que explica la evolución temporal del valor de la empresa como una función de las características de crecimiento y volatilidad de las variables de estado, de la relación entre éstas (medida por el coeficiente de correlación lineal ρ_{12}), del valor en el momento final y del flujo neto de caja instantáneo:

$$dV = \left[V(t)\cdot\alpha - F_{DI}(t)\right]dt + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\sigma_i\left(X_i,t\right)dZ_i + \frac{\partial V}{\partial V_n}\sigma_n\left(V_n,t\right)dZ_n \qquad (6)$$

donde el primer término representa la variación absoluta esperada en un intervalo temporal infinitesimal, y el segundo y tercer término, la incertidumbre de dicha variación que procede, por una parte, de las variables de estado (incertidumbre de mercado) y, por otra, de la depreciación del capital (incertidumbre técnica).

La empresa estará en condiciones operativas una vez finalizado el programa de inversiones por una cuantía total *K*. Siguiendo a Pindyck (1993), aceptamos la existencia de incertidumbre sobre la inversión total realizada. Esto es razonable porque en la realidad cualquier programa de inversiones puede desviarse de lo planificado, tanto por razones económicas como técnicas. El proceso estocástico definido para la variable *K(t)* presenta dos figuras interesantes: el coste explícito de retrasar la inversión y el desembolso instantáneo de capital. Así pues, la evolución de la inversión total pendiente de realizar en un momento t se describe como un proceso geométrico-aritmético, donde el componente geométrico (*rK(t)dt*) representa el coste explícito de retrasar la inversión y el componente aritmético (*I(t)dt*) el desembolso de capital.

$$dK = \left[rK(t) - I(t)\right]dt + \sigma_K\left(I(t),K(t),t\right)dZ_K \qquad (7)$$

El componente de volatilidad es definido como en Pindyck (1993):

$$\sigma_K\left(I(t),K(t),t\right) = \sigma_K\sqrt{I(t)\cdot K(t)} \qquad (8)$$

Esta especialización de la función de volatilidad determina la solución del tamaño de la inversión realizada en cada instante como una solución *bang-bang*:

$$I(t) = \begin{cases} \max I(t) = I & \text{si se realiza inversión} \\ \\ \min I(t) = 0 & \text{no se realiza inversión} \end{cases} \qquad (9)$$

La empresa desearía conocer el programa de inversiones óptimo. Por tanto, el problema se definirá como un problema de maximización del valor esperado a lo largo de la etapa de construcción. Así el valor de la empresa en un momento cualquiera τ de dicha etapa (véase A2) se expresa como:

$$V(\tau)=\max_{I(t)}\left\{E_\tau\left[V_n(T)e^{-\alpha(T-\tau)}+\int_{t_e}^{T}F_{DI}(t)e^{-\alpha(t-\tau)}dt-\int_{\tau}^{t_e}I(t)e^{-\alpha(t-\tau)}dt\right]\right\} \qquad (10)$$

4. La flexibilidad de invertir en la etapa de construcción

En la sección anterior hemos definido el modelo básico de valoración del proyecto de inversión objeto de estudio. En esta y en las sucesivas secciones introduciremos algunos refinamientos para incorporar al problema de valoración las opciones reales que existen en el mismo. El primero de ellos está relacionado con la flexibilidad de invertir o no durante la etapa de construcción, reflejada en la expresión (9). Como parece lógico y razonable podría ser óptimo detener temporal o definitivamente las obras de construcción ante condiciones adversas del mercado o más concretamente ante unas expectativas negativas sobre las variables de estado. De manera que sería interesante encontrar los valores críticos de dichas variables para los cuales se aconsejaría detener, reanudar o abandonar definitivamente el programa de inversiones, con el consiguiente coste de parada y reanudación.

El problema propuesto está cercano al espíritu del originalmente tratado por Brennan y Schwartz (1985), con relación a determinar la política óptima de extracción de cobre de una mina y su influencia en el valor de la misma. Más tarde Cortazar y Casassus (1998) lo desarrollaron incorporando una opción de crecimiento o expansión. También encontramos como antecedente a nuestro problema de política óptima de inversiones, el resuelto por Majd y Pindyck (1987) y Pindyck (1993).

La nomenclatura adicional empleada en esta sección es la siguiente:

- V: Valor de la empresa activamente en construcción.
- W: Valor de empresa detenida la construcción.

- X^d: Valor crítico para el cual se detendrá el programa de inversión.
- C_d: Coste de detener el programa de inversión.
- X^r: Valor crítico para el cual se reanudará el programa de inversión.
- C_r: Coste de reanudar el programa de inversión.
- X^a: Valor crítico para el cual se abandonará el programa de inversión.

Como la flexibilidad de invertir se concreta en una solución de tipo *bang-bang*, es decir, invertir la cantidad "I" o "no invertir nada", el valor de la empresa y la política óptima de inversión puede obtenerse resolviendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales, una para cada posible solución de $I(t)$ (introducimos la simplificación $V_n(T) = 0$, que se mantendrá en adelante):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\mu_i\left(X_i,t\right)+\frac{\partial V}{\partial K}\left(rK\left(t\right)-I\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X_1^2}\sigma_i\left(X_i,t\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial K^2}\sigma_K^2 IK\left(t\right)\\&+\frac{\partial^2 V}{\partial X_1\partial X_2}\sigma_1\left(X_1,t\right)\sigma_2\left(X_2,t\right)\rho_{12}-I=V\left(t\right)\alpha\end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial W}{\partial X_i}\mu_i\left(X_i,t\right)+\frac{\partial W}{\partial K}rK\left(t\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2}\sigma_i\left(X_i,t\right)^2\\&+\frac{\partial^2 W}{\partial X_1\partial X_2}\sigma_1\left(X_1,t\right)\sigma_2\left(X_2,t\right)\rho_{12}=W\left(t\right)\alpha\end{aligned} \tag{11b}$$

con las correspondientes condiciones de valor, de derivadas y de contorno. Las primeras condiciones son similares a las que aparecen en Brennan y Schwartz (1985), extendidas aquí para el caso de dos variables de estado.

Condiciones de valor

1. La construcción puede detenerse temporalmente, aunque con coste (C_d):

$$V\left(X_1^d,X_2^d,K,t\right)=\max\left\{W\left(X_1^d,X_2^d,K,t\right)-C_d,0\right\} \tag{12}$$

2. La construcción puede reanudarse, aunque con coste (C_r):

$$W\left(X_1^r,X_2^r,K,t\right)=V\left(X_1^r,X_2^r,K,t\right)-C_r \tag{13}$$

3. Una vez detenida la construcción puede abandonarse definitivamente:

$$W\left(X_1^a, X_2^a, K, t\right) = 0 \tag{14}$$

Condiciones de derivadas

$$\frac{\partial V\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right)}{\partial X_1} = \begin{cases} \dfrac{\partial W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right)}{\partial X_1} & \text{si } W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right) - C_d \geq 0 \\ 0 & \text{si } W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right) - C_d < 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\frac{\partial V\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right)}{\partial X_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right)}{\partial X_2} & \text{si } W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right) - C_d \geq 0 \\ 0 & \text{si } W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right) - C_d < 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 V\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right)}{\partial X_1 \partial X_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right)}{\partial X_1 \partial X_2} & \text{si } W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right) - C_d \geq 0 \\ 0 & \text{si } W\left(X_1^d, X_2^d, K, t\right) - C_d < 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\frac{\partial V\left(X_1^r, X_2^r, K, t\right)}{\partial X_1} = \frac{\partial W\left(X_1^r, X_2^r, K, t\right)}{\partial X_1} \tag{18}$$

$$\frac{\partial V\left(X_1^r, X_2^r, K, t\right)}{\partial X_2} = \frac{\partial W\left(X_1^r, X_2^r, K, t\right)}{\partial X_2} \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 V\left(X_1^r, X_2^r, K, t\right)}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 W\left(X_1^r, X_2^r, K, t\right)}{\partial X_1 \partial X_2} \tag{20}$$

$$\frac{\partial W\left(X_1^a, X_2^a, K, t\right)}{\partial X_1} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial W\left(X_1^a, X_2^a, K, t\right)}{\partial X_2} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 W\left(X_1^a, X_2^a, K, t\right)}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \tag{23}$$

Condiciones de contorno

1. Para la variable *K*

$$\lim_{K \to \infty} V\left(X_1, X_2, K, t\right) = W\left(X_1, X_2, K, t\right) = 0 \tag{24}$$

2. Para la variable X_1

$$\lim_{X_1 \to \infty} \frac{V\left(X_1, X_2, K, t\right)}{X_1} < \infty \tag{25}$$

$$\lim_{X_1 \to \infty} \frac{W\left(X_1, X_2, K, t\right)}{X_1} < \infty \tag{26}$$

3. Para la variable X_2

$$\lim_{X_2 \to \infty} \frac{V\left(X_1, X_2, K, t\right)}{X_2} < \infty \tag{27}$$

$$\lim_{X_2 \to \infty} \frac{W\left(X_1, X_2, K, t\right)}{X_2} < \infty \tag{28}$$

La ecuación (12) indica que ante expectativas adversas de las variables de estado, podría aconsejarse detener las obras incurriendo en un coste fijo. Si este coste es tan elevado que compensa con creces el beneficio de parar la construcción, la decisión óptima será proseguir con el programa de inversiones, pese a que el valor de la empresa en construcción sea nulo. Esta decisión se expresa en forma de valores críticos de las variables de estado, por debajo de los cuales la empresa sólo seguirá invirtiendo si es menos oneroso que detener la construcción.

Las ecuaciones (13) y (14) están relacionadas. Mientras que la primera establece los niveles críticos por encima de los cuales se reanudaría el programa de inversión, la segunda establece los niveles críticos por debajo de los cuales se abandonaría definitivamente.

5. Las opciones reales del proyecto de ampliación

En esta sección trataremos las opciones reales que emergen con el desarrollo del proyecto de ampliación. En primer lugar, definiremos el problema de valoración que corresponde a cada una de las opciones reales individualmente consideradas, y después lo definiremos tratándolas conjuntamente.

Vinculadas a la opción de realizar el proyecto de inversión se encuentran dos opciones más, una de sustitución o intercambio en el empleo de los recursos existentes antes de la ampliación y otra de venta o cesión total o parcial vinculada a un posible acuerdo entre la AP y un agente privado. Ninguna de estas opciones es, a priori, una opción formal en el sentido de las opciones financieras, si no que representan posibles decisiones futuras de carácter discrecional, que sólo serán llevadas a cabo si la racionalidad económica así lo aconseja y, por tanto, su valor depende de las expectativas sobre el futuro desarrollo del negocio.

5.1. La opción simple de invertir en el proyecto de ampliación

En la sección anterior hemos definido un problema de inversión secuencial donde existe la posibilidad de abandono temporal del programa de inversiones, para reanudarlo posteriormente o abandonarlo definitivamente. No obstante, el problema de valoración de la decisión de invertir sólo quedó parcialmente resuelto, dado que se describía una situación donde periódicamente había que responder a sí invertir o no la cantidad “I” a fin de avanzar en el programa de inversiones. Sin embargo, no se respondió a la pregunta "¿cual es el valor en un momento anterior a t_0 de un derecho para invertir en el futuro proyecto de ampliación?". Vista así, la decisión de invertir puede ser tratada como una opción europea de vencimiento t_0 definida sobre el proyecto de ampliación.

Denotemos por $c(X_1, X_2, K, t)$ el valor de la opción simple de invertir. Haciendo uso del lema de Ito podemos construir la ecuación diferencial que tendrá como solución el valor de la opción:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial c}{\partial X_i}\mu_i\left(X_i,t\right)+\frac{\partial c}{\partial K}rK\left(t\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 c}{\partial X_1^2}\sigma_i\left(X_i,t\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial K^2}\sigma_K^2 I\left(t\right)K\left(t\right)$$
$$+\frac{\partial^2 c}{\partial X_1 \partial X_2}\sigma_1\left(X_1,t\right)\sigma_2\left(X_2,t\right)\rho_{12}=c\left(t\right)\alpha_c \qquad (29)$$

donde α_c es el tipo de interés constante adecuado al riesgo de la opción. En la fecha de vencimiento el valor de la opción debe verificar la siguiente condición:

$$c\left(X_1,X_2,K,t_0\right)=\max\left\{V,W,0\right\} \qquad (30)$$

La condición (30) introduce una peculiaridad interesante, en la fecha de vencimiento de la opción la empresa podrá elegir entre iniciar inmediatamente el programa de inversiones (*V*), esperar (*W*) o abandonar (0) (véase A2 para el resto de condiciones).

5.2. La opción simple de sustitución del empleo de los recursos

La opción de dedicar una parte de la actual infraestructura a otros usos no relacionados con el negocio portuario está vinculada a la decisión de ampliación. Concretamente, se trata de dedicar una pequeña zona, que recibe el nombre de pantalán y que alberga un tráfico por importación muy concreto que podría ser redirigido a otras zonas, al uso y disfrute del área metropolitana adyacente.

El ejercicio de esta opción de sustitución o intercambio da lugar a:

- Un cambio de actividad en la zona pantalán que podría generar un valor social (*VS*) con transcendencia económica a medio y largo plazo, y que caracterizamos como un proceso de difusión análogo a (1):

$$dVS=\mu\left(VS,\delta,t\right)dt+\sigma\left(VS,\delta,t\right)dZ \qquad (31)$$

siendo $*$ el flujo neto de caja instantáneo.

- Una mejora en la gestión con reducción de costes del tráfico redirigido.

Definimos como:

- VP: Valor de la actividad portuaria realizada en la zona pantalán, sin ejercicio de la opción de sustitución (S(VS,Y,t)).

- VPO: Valor procedente del tráfico redirigido (Y), trás el ejercicio de dicha opción.

El valor total creado será la suma del valor social y del valor portuario, *VS+(VPO-VP)*. Por tanto, la opción de sustitución será valiosa siempre que el signo de dicha suma sea positivo. En particular, el valor de la opción en el momento final de vencimiento puede expresarse como max{*VS+VPO-VP*, 0} (véase A3 para una descripción más detallada).

5.3. *El valor de cesión total o parcial*

La segunda opción real identificada en el proyecto de ampliación se encuentra en un posible acuerdo entre la AP y un agente privado que podría encargarse de la gestión y explotación total o parcial del mismo. El acuerdo implicaría compartir los costes de la inversión, y a cambio la AP recibiría unos ingresos periódicos por cesión. La AP necesita valorar esta opción de cesión cuya fecha de vencimiento (fecha del acuerdo) podría ser anterior o posterior al inicio de las obras, pero no posterior a la fecha de explotación t_e.

La cesión podría producirse en la forma de un porcentaje de reparto, q $(0 \leq q \leq 1)$, tanto de las obras de construcción como del futuro tráfico marítimo, pudiendo convenirse el pago de un canon periódico fijo (en función del suelo cedido) y/o variable (en función del tráfico cedido).

Hasta el momento que se produzca la cesión, la AP habrá realizado parte del programa de inversiones, concretamente, la diferencia entre la inversión total necesaria en el momento inicial y la inversión pendiente de realización en dicho momento. Es esta última sobre la que se realizará la cesión en el citado porcentaje. Siendo τ el momento del acuerdo, tenemos:

- $(1-q)K(\vartheta)$ es la inversión pendiente para la AP.
- $qK(\vartheta)$ es la inversión cedida al agente privado.

Así, la inversión total realizada por la AP, y sobre la cual se calcularía la depreciación, será la suma de la inversión realizada hasta el momento de cesión y la realizada en adelante:

$$K(t_0)-K(\tau)+(1-q)K(\tau)=K(t_0)-qK(\tau) \qquad (32)$$

De manera que el porcentaje de inversión total realizada por la AP (p) es simplemente:

$$p = 1 - \frac{K(\tau)}{K(t_0)} q \tag{33}$$

o alternativamente:

$$p = \frac{K(t_e)}{K(t_0)} \tag{34}$$

siendo:

$$K(t_e) = E_e\left[\int_{t_0}^{\tau} I(t)\,dt + \int_{\tau}^{t_e} (1-q) I(t)\,dt\right] \tag{35}$$

El flujo neto de caja generado por la AP tendrá dos componentes, uno procedente de la explotación directa y otro de la cesión:

- *Flujo neto de caja directo*:

$$F_D(t) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2} pX_i(t) - Q\right)\frac{X_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} X_i(t)}(P_i - C_{vi})1_{\left\{\sum_{i=1}^{2} pX_i(t) > Q\right\}} - pC_f \tag{36}$$

- *Flujo neto de caja indirecto*:

$$F_I(t) = \sum_{i=1}^{2}(1-p)X_i(t)t_i + c(1-p)K(t_0) \tag{37}$$

- t_i: canon variable.
- c: canon fijo.

El valor obtenido por la AP con la cesión realizada en un momento cualquiera τ, puede expresarse como:

$$VC(\tau) = \max_{q, I(t)} \left\{ E_\tau \left[\int_{t_e}^{T} F_{DI}(t) e^{-\alpha(t-\tau)} dt - \int_{\tau}^{t_e} (1-q) I(t) e^{-\alpha(t-\tau)} dt \right] \right\} \tag{38}$$

Dada la expresión (9), el porcentaje óptimo de cesión y el valor que resultaría de la misma puede obtenerse resolviendo un sistema similar a (11a-b):

$$\begin{aligned} &\max_q \left\{ \frac{\partial VC}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial VC}{\partial X_i} \mu_i(X_i,t) + \frac{\partial VC}{\partial K}\left(rK(t) - I\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 VC}{\partial X_i^2} \sigma_i(X_i,t)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VC}{\partial K^2} \sigma_K^2 IK(t) + \frac{\partial^2 VC}{\partial X_1 \partial X_2} \sigma_1(X_1,t)\sigma_2(X_2,t)\rho_{12} - (1-q)I \right\} = VC(t)\alpha \end{aligned} \tag{39a}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial WC}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial WC}{\partial X_i} \mu_i(X_i,t) + \frac{\partial WC}{\partial K} rK(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 WC}{\partial X_i^2} \sigma_i(X_i,t)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 WC}{\partial X_1 \partial X_2} \sigma_1(X_1,t)\sigma_2(X_2,t)\rho_{12} = WC(t)\alpha \end{aligned} \tag{39b}$$

Teniendo por condiciones las establecidas en la sección 4 referidas a *VC(t)* y *WC(t)*.

5.4. La opción simple de cesión total o parcial

La opción de cesión, $P(X_1, X_2, K, t)$, tendrá valor, en un momento cualquiera τ de la etapa de construcción, siempre que el valor obtenido con la cesión, $VC(\tau)$, supere el valor obtenido de ser la inversión íntegramente realizada por la AP, $V(\tau)$. No será óptimo el ejercicio de dicha opción mientras se cumpla que su valor sea mayor que el resultado obtenido con el ejercicio de la misma, $P > \max\{VC - V, WC - W, 0\}$ (véase A4 para una descripción más detallada).

5.5. La opción compuesta de invertir en el proyecto de ampliación

Como se ha mostrado en las secciones anteriores, la decisión de invertir en el proyecto de ampliación es propiamente una opción que alberga dos opciones más (que podrían interactuar entre ellas, aunque aquí se consideran independientes): la opción de sustitución (*S*) vinculada a la zona pantalán, y la opción de cesión (*P*) vinculada al acuerdo entre la AP y un agente privado. Así pues, la decisión de invertir en el proyecto de inversión puede ser vista como la decisión de ejercer una opción compuesta (*C*). La correcta valoración del proyecto de ampliación debe abarcar todas las opciones presentes implícita y explícitamente, con relevancia suficiente. En este caso particular, el valor de la opción de invertir es función del valor social (*VS*), del tráfico marítimo procedente de la zona pantalán (*Y*), del resto del tráfico (X_1, X_2) y de la inversión total $K(t_0)$.

Considerando los procesos *X* e *Y* independientes, el valor de la opción de invertir puede caracterizarse a través de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial C}{\partial X_i}\mu_i\left(X_i,t\right)+\frac{\partial C}{\partial Y}\mu_Y\left(Y,t\right)+\frac{\partial C}{\partial VS}\mu\left(VS,\delta,t\right)+\frac{\partial C}{\partial K}rK\left(t\right)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 C}{\partial X_i^2}\sigma_i\left(X_i,t\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\sigma_Y\left(Y,t\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}\sigma_K^2 I\left(t\right)K\left(t\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial VS^2}\sigma\left(VS,\delta,t\right)^2+\frac{\partial^2 C}{\partial X_1\partial X_2}\sigma_1\left(X_1,t\right)\sigma_2\left(X_2,t\right)\rho_{12}=C\left(t\right)\alpha_C\end{aligned}\qquad(40)$$

Condiciones finales

Consideradas independientes las opciones de sustitución y de cesión, el valor de la opción compuesta de invertir en el vencimiento debe cumplir la siguiente condición:

$$C\left(X_1,X_2,Y,VS,K,t\right)=\max\left\{V+P+S,W+P+S,0\right\}\qquad(41)$$

Otras condiciones

$$\lim_{K\to\infty}C\left(X_1,X_2,Y,VS,K,t\right)=0\qquad(42)$$

$$C\left(X_1^*,X_2^*,Y^*,VS^*,K,t\right)=W+P+S\qquad(43a)$$

$$C\left(X_1^{**},X_2^{**},Y^{**},VS^{**},K,t\right)=V+P+S\qquad(43b)$$

$$\frac{\partial C\left(X_1^*,X_2^*,Y^*,VS^*,K,t\right)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(W+P+S\right)\qquad(44a)$$

$$\frac{\partial C\left(X_1^{**}, X_2^{**}, Y^{**}, VS^{**}, K, t\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V + P + S\right) \tag{44b}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{C\left(X_1, X_2, Y, VS, K, t\right)}{x} < \infty \\ &x \in A; \qquad A = \left\{X_1, X_2, Y, VS\right\} \end{aligned} \tag{45}$$

Con todo, el problema de valoración queda definido como un problema complejo de valoración múltiple. Para determinar el valor de la opción compuesta de invertir es preciso obtener previamente el valor del proyecto de inversión con flexibilidad en la etapa de construcción y el valor de las opciones de sustitución y cesión.

La resolución del problema requiere una investigación adicional para encontrar un algoritmo numérico capaz de reproducir la versatilidad del problema, que proporcione buenas soluciones y que sea computacionalmente eficiente.

6. Comentarios finales

La principal contribución de este trabajo es la formalización matemática de un problema de valoración de un proyecto de inversión pública donde coexisten intereses públicos y privados. Las características especiales del proyecto ofrecen dificultades a los métodos clásicos de valoración. Siendo necesario el uso de una metodología que reconozca y valore la flexibilidad natural que existe en los procesos de inversión secuencial, que consiste en la posibilidad de detener temporal o definitivamente la inversión, y que resalte las oportunidades estratégicas u opciones reales que emergen con la realización del proyecto. La metodología utilizada proviene del análisis de los derechos contingentes, empleando argumentos de equilibrio dada la ausencia de mercado para el activo subyacente.

La versatilidad del proyecto de inversión da lugar a un problema complejo que requiere resolver tres problemas de valoración de opciones. En todos los casos, el valor de la opción está caracterizado por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden y por condiciones particulares, a través de las cuales se proporciona información sobre valores críticos de las variables de estado. Dichos valores tienen una interpretación concreta, aunque no sustancialmente distinta, en cada uno de los problemas de valoración planteados. En el caso de la opción compuesta, los valores críticos representan los valores de las variables de estado para los cuales el valor de la opción es exactamente igual al valor esperado del futuro programa de inversiones incluidas las opciones de sustitución y venta. Para el caso de éstas últimas, los valores críticos designan aquellos valores de las variables de estado para los cuales el valor de la opción es el valor de paridad.

A lo largo del trabajo se ha eludido la resolución de los problemas planteados, ya que su complejidad impide la aproximación utilizando métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. La investigación actual apunta a la utilización de algoritmos genéticos como métodos de resolución eficientes.

APÉNDICE

A1. El valor de la empresa durante la etapa de construcción

El valor de la empresa durante la etapa de construcción puede obtenerse como solución a una ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\max_{I(t)}\{ &\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\mu_i(X_i,t)+\frac{\partial V}{\partial K}(rK(t)-I(t))-\frac{\partial V}{\partial V_n}D+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X_i^2}\sigma_i(X_i,t)^2 \\ &+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial K^2}\sigma_K^2 I(t)K(t)+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial V_n^2}\sigma_n(V_n,t)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial X_1\partial X_2}\sigma_1(X_1,t)\sigma_2(X_2,t)\rho_{12} \\ &+\frac{\partial^2 V}{\partial K\partial V_n}\sigma_K(I,K)\sigma_n(V_n,t)\rho_{KV_n}-I(t)\}=V(t)\alpha\end{aligned} \qquad (A1.1)$$

A2. La opción simple de invertir en el proyecto de ampliación

Denotemos por $c(X_1, X_2, K, t)$ el valor de la opción simple de invertir. Haciendo uso del lema de Ito puede construirse la ecuación en derivadas parciales cuya solución será el valor de la opción:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial c}{\partial X_i}\mu_i(X_i,t)+\frac{\partial c}{\partial K}rK(t)+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 c}{\partial X_i^2}\sigma_i(X_i,t)^2+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial K^2}\sigma_K^2 I(t)K(t) \\ &+\frac{\partial^2 c}{\partial X_1\partial X_2}\sigma_1(X_1,t)\sigma_2(X_2,t)\rho_{12}=c(t)\alpha_c\end{aligned} \qquad (A2.1)$$

donde α_c es el tipo de interés constante adecuado al riesgo de la opción. La solución de (A2.1) debe verificar las siguientes condiciones:

$$c(X_1,X_2,K,t)=\max\{V,W,0\} \qquad t=t_0 \qquad (A2.2)$$

$$c(X_1=X_2=0,K,t)=0 \qquad (A2.3)$$

$$c(X_1^*,X_2^*,K,t)=V \qquad (A2.4a)$$

$$c(X_1^{**},X_2^{**},K,t)=W \qquad (A2.4b)$$

$$\frac{\partial c(X_1^*,X_2^*,K,t)}{\partial X_1}=\frac{\partial V(X_1^*,X_2^*,K,t)}{\partial X_1} \qquad (A2.5a)$$

$$\frac{\partial c(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t)}{\partial X_1} = \frac{\partial W(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t)}{\partial X_1} \tag{A2.5b}$$

$$\frac{\partial c(X_1^{*}, X_2^{*}, K, t)}{\partial X_2} = \frac{\partial V(X_1^{*}, X_2^{*}, K, t)}{\partial X_2} \tag{A2.6a}$$

$$\frac{\partial c(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t)}{\partial X_2} = \frac{\partial W(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t)}{\partial X_2} \tag{A2.6b}$$

$$\lim_{K\to\infty} c(X_1, X_2, K, t) = 0 \tag{A2.7}$$

$$\lim_{X_1\to\infty} \frac{c(X_1, X_2, K, t)}{X_1} < \infty \tag{A2.8}$$

$$\lim_{X_2\to\infty} \frac{c(X_1, X_2, K, t)}{X_2} < \infty \tag{A2.9}$$

La condición (A2.2) introduce una peculiaridad interesante, en la fecha de vencimiento de la opción la empresa podrá elegir entre iniciar inmediatamente el programa de inversiones (V), esperar (W) o abandonar (0). Las condiciones (A2.4a-b) establecen los niveles críticos de las variables de estado para los cuales el valor de la opción es el valor de paridad.

A3. **La opción simple de sustitución del empleo de los recursos**

Sea S(VS, Y, t) el valor de la opción de sustitución y α_S el tipo de interés constante adecuado al riesgo de la misma. Puede comprobarse que el valor de opción será solución de la siguiente ecuación en derivadas parciales con las condiciones especificadas:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial VS}\mu(VS, \delta, t) + \frac{\partial S}{\partial Y}\mu_Y(Y, t) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial VS^2}\sigma(VS, \delta, t)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\sigma_Y(Y, t)^2 = S(t) \tag{A3.1}$$

s.a.

$$S(VS, Y, t) \geq \max\{VS + VPO - VP, 0\} \qquad t < T \tag{A3.2}$$

$$S(VS, Y, t) = \max\{VS + VPO - VP, 0\} \qquad t = T \tag{A3.3}$$

$$S\,(VS = Y = 0, t) = 0 \tag{A3.4}$$

$$S(VS^*, Y^*, t) = VS + VPO - VP \qquad t = T \tag{A3.5}$$

$$\frac{\partial S(VS^*, Y^*, t)}{\partial VS} = 1 \tag{A3.6}$$

$$\frac{\partial S(VS^*, Y^*, t)}{\partial Y} \geq 0 \tag{A3.7}$$

$$\lim_{VS \to \infty} \frac{S(VS, Y, t)}{VS} < \infty \tag{A3.8}$$

$$\lim_{Y \to \infty} \frac{S(VS, Y, t)}{Y} < \infty \tag{A3.9}$$

La condición (A3.2) es la propia de una opción americana, la condición (A3.3) corresponde a la fecha de vencimiento de la opción y la condición (A3.5) al valor de paridad de la opción.

A4. La opción simple de cesión total o parcial

Sea $P = P(X_1, X_2, K, t)$ el valor de la opción simple de cesión. Utilizando el lema de Ito puede obtenerse la ecuación en derivadas parciales cuya solución bajo particulares condiciones será el valor de la opción:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial P}{\partial X_i} \mu_i(X_i, t) + \frac{\partial P}{\partial K}(rK(t) - I(t)) + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2} \sigma_i(X_i, t)^2 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial K^2} \sigma_K^2 I(t) K(t) + \frac{\partial^2 P}{\partial X_1 \partial X_2} \sigma_1(X_1, t) \sigma_2(X_2, t) \rho_{12} = P(t) \alpha_P \tag{A4.1}$$

siendo α_P el tipo de interés constante adecuado al riesgo de la opción, y las condiciones específicas son las siguentes:

$$P(X_1, X_2, K, t) \geq \max\{VC - V,\ WC - W, 0\} \qquad t < t_e \tag{A4.2}$$

$$P(X_1, X_2, K, t) = \max\{VC - V, WC - W, 0\} \qquad t = t_e \tag{A4.3}$$

$$\lim_{X_1, X_2 \to \infty} P(X_1, X_2, K, t) = 0 \tag{A4.4}$$

$$P(X_1^*, X_2^*, K, t) = VC(X_1^*, X_2^*, K, t) - V(X_1^*, X_2^*, K, t) \tag{A4.5a}$$

$$P(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t) = WC(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t) - W(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t) \tag{A4.5b}$$

$$\frac{\partial P(X_1^*, X_2^*, K, t)}{\partial X_1} = \frac{\partial VC}{\partial X_1} - \frac{\partial V}{\partial X_1} \tag{A4.6a}$$

$$\frac{\partial P(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t)}{\partial X_1} = \frac{\partial WC}{\partial X_1} - \frac{\partial W}{\partial X_1} \tag{A4.6b}$$

$$\frac{\partial P(X_1^*, X_2^*, K, t)}{\partial X_2} = \frac{\partial VC}{\partial X_2} - \frac{\partial V}{\partial X_2} \tag{A4.7a}$$

$$\frac{\partial P(X_1^{**}, X_2^{**}, K, t)}{\partial X_2} = \frac{\partial WC}{\partial X_2} - \frac{\partial W}{\partial X_2} \tag{A4.7b}$$

La condición (A4.5a-b) determina los niveles críticos de las variables de estado para los cuales el valor de la opción es el valor de paridad.

Referencias bibliográficas

Black, F. y Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corparate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(3), págs. 637-354.

Brennan, M. y Schwartz, E. (1985): "Evaluating natural resource investments", *Journal of Business*, 58, 2, págs. 135-157.

Cortazar, G. y Casassus, J. (1998): "Optimal timing of a mine expansion: implementing a real options model", *The Quarterly Review of Economics and Finance,* vol. 38, special issue, págs. 755-769.

Dias, M. y Rochas, K. (1999): "Petroleum Concessions with Extendible Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices", Working Paper presentado al 3rd Annual International Conference on Real Options (June 1999).

Dixit, A. y Pindyck, R. (1994): *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1996): *Brownian motion and stochastic calculus,* Graduate Text in Mathematics, Ed. Springer-Verlag.

Kester, C. (1984): "Today's options for tomorrow's growth*", Harvad Business Review*. Traducido por Cuadernos Económicos de ICE, 1986/1, págs. 177-186.

Majd, S. y Pindyck, R. (1987): "Time to build, option value, and investment decisions", *Journal of Financial Economics*, 18, págs. 7-27.

McDonald, R. y Siegel, D. (1985): "Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down", *International Economic Review,* 26, 2, junio, págs. 331-349.

McDonald, R. y Siegel, D. (1986): "The value of waiting to invest", *The Quarterly Journal of Economics,* noviembre, págs. 707-727.

Merton, R. (1973a): "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science,* primavera, págs.140-183.

Myers, S. (1977): “Determinants of corporate Borrowing”, *Journal of Financial Economics*, 5, págs. 147-175.

Myers, S. (1984): “Finance theory and financial strategy”, *Interfaces*, 14, 1, págs. 126-137.

Myers, S. y Majd, S. (1983): "Calculating abandonment value using option princing theory", Working paper, Sloan School of Management, MIT, 1983. Traducido al castellano por Cuadernos Económicos de I.C.E. 1986/1, págs. 153- 169.

Olsen, E. y Stensland, G. (1988): "Optimal shutdown decisions in resource extraction", *Economics Letters,* 26, págs. 215-218.

Paddock, J., Siegel, D. y Smith, J. (1988): "Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases", *Quaterly Journal of Economics,* 103, Agosto, págs. 479-508.

Pindyck, R. (1991): "Irreversibility, uncertainty and investment", *Journal of Economic Literature,* 24, págs. 1110-1148.

Pindyck, R. (1993): "Investment of uncertainty cost", *Journal of Financial Economics*, 34, págs. 53-76.

Ruiz, F. (1986): "Aplicación de la teoría de valoración de opciones a las finanzas de empresa", *Cuadernos Económicos de ICE*, vol. 1, págs. 7-31.

Smith, C.W. (1979): "Applications of option pricing analysis", en *Handbook of Financial Economics*, ed. Por Bicksler, J.L. Amsterdam, North-Holland Publishing Company , págs. 80-121.

Tourinho, O. (1979): "The option value of reserves of natural resources", Working paper nº 94, Institute of Business and Economics Research, University of California, Berkeley.