EL MODELO TABULAR EN DEMOGRAFÍA: UNA LECTURA INPUT-OUTPUT

Ernesto J. Veres*

WP-EC 2001-01

Correspondencia a E.J. Veres: Universitat de València, Dpto. de Economía Aplicada, Campus de los Naranjos, Edificio Departamental Oriental, 46022 Valencia. Tel.: 963 82 84 24 / email: Ernesto.Veres@uv.es.

Editor: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.
Primera Edición Enero 2001
Depósito Legal: V-521-2001

* Universitat de València

EL MODELO TABULAR EN DEMOGRAFÍA: UNA LECTURA INPUT-OUTPUT

Ernesto J. Veres

RESUMEN

El esquema del modelo analítico conocido como "tabla demográfica" permite medir la influencia que sobre un único fenómeno demográfico tiene el tiempo, entendido éste como "duración o edad". El presente trabajo utiliza la técnica del análisis input-output para explicar las relaciones existentes en una tabla demográfica, enriqueciendo las conclusiones que pueden extraerse de ella y permitiendo establecer la relación entre el tiempo-calendario y el tiempo-duración. También se define una medida para valorar la diferencia entre dos tablas demográficas diferentes - referidas a momentos o a poblaciones distintas - a la hora de describir la incidencia del mismo fenómeno demográfico. Se aplica la metodología I/O expuesta a una tabla concreta, correspondiente a la nupcialidad de las mujeres españolas en el período 1956-65, mientras que las tablas-tipo de mortalidad son utilizadas para ilustrar la medición de las diferencias entre ellas.

Palabras clave: calendario, coeficientes técnicos, demanda final, intensidad, matriz inversa, mortalidad, nupcialidad, output total, tabla demográfica, tabla input-output.

ABSTRACT

The analytical model scheme known as "demographic table" permits to measure the influence that on an only demographic phenomenon has the time, understood this as "duration or age". The present work uses the analysis input-output technique to explain the existing relationships in a demographic table, enriching the conclusions that they can obtain of it and permitting to establish the relationship between the time-calendar and the time-duration. Also it is defined a measure to value the difference between two different demographic tables - referred to moments or to different populations - to the time of describing the incidence of the same demographic phenomenon. It is applied the I/O methodology exposed to a concrete table, corresponding to the marriage of the Spanish women in the period 1956-65, while model life tables are used to illustrate the measurement of the differences between them.

Key words: calendar, technical coefficients, final demand, intensity, inverse matrix, mortality, marriage, total output, demographic table, input-output table.

1. Introducción

El modelo conocido como *tabla demográfica* permite analizar un fenómeno demográfico F a través de cierto suceso característico A, que supondremos irrepetible. La información para el análisis es proporcionada por la observación de la incidencia del suceso A sobre una cohorte, estudiándose la frecuencia con la que ese suceso característico va apareciendo desde una edad inicial - que denotamos por x_0 - , hasta una edad final en la que el suceso deja de hacer su aparición - denotada por x_ω - .

En nuestro desarrollo, supondremos - salvo indicación al contrario - que la tabla demográfica es *completa,* esto es, que las edades o duraciones consideradas son *simples* (edad por edad), y que éstas tiene la consideración de *duraciones o edades exactas*. La extensión a tablas *abreviadas* (generalmente, por grupos quinquenales) es inmediata. Por comodidad de presentación, las aplicaciones se realizas sobre tablas abreviadas.

Supondremos que la tabla demográfica queda definida a partir de las tres series biométricas fundamentales siguientes:

- serie de individuos no alcanzados por A antes de la edad x, denotada por $\{L_x\}_{x=x_0}^{x_\omega}$ (*serie de supervivientes*);
- serie del flujo relativo del suceso A entre dos edades consecutivas x y $x+1$, denotada por $\{D(x,x+1)\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$ (*serie de flujo de sucesos*); y,
- serie de probabilidades de que un individuo, en el momento de llegar a la edad x, sea alcanzado por el suceso A antes de llegar a $x+1$, denotada por $\{q_x\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$ (*serie de probabilidades de ocurrencia del suceso A*).

Suponiendo una cohorte ficticia con L_0 efectivos iniciales (generalmente, una potencia de 10 individuos), las relaciones entre las tres series anteriores son las siguientes:

$$D(x,x+1) = L_x - L_{x+1}$$
$$q_x = \frac{D(x,x+1)}{L_x}$$

por lo que, conocida una cualquiera de las series, son conocidas las otras dos.

La *intensidad* y el *calendario* son dos índices analíticos básicos que se deducen fácilmente de una tabla demográfica. La intensidad I - expresada en términos absolutos - representa el número de individuos que acaban por ser alcanzados por el suceso A a lo largo de la vigencia del fenómeno estudiado. Esto es:

$$I = L_{x_0} - L_{x_\omega} = \sum_{x=x_0}^{x_{\omega-1}} D(x, x+1)$$

mientras que, en términos relativos, esa intensidad puede definirse como el porcentaje de individuos alcanzados por A sobre el total de efectivos iniciales L_{x_0}, esto es:

$$I_r = \frac{L_{x_0} - L_{x_\omega}}{L_{x_0}} = 1 - \frac{L_{x_\omega}}{L_{x_0}}$$

El calendario *d(x,x+1)* representa la distribución por edades de la intensidad anterior. Se trata de una distribución de probabilidad condicional, de expresión:

$$d(x, x+1) = \frac{D(x, x+1)}{I}$$

Con los elementos anteriores, pretendemos aplicar a la tabla demográfica la metodología Input-Output, para así determinar las relaciones existentes entre sus funciones biométricas.

En Veres (1999) se presenta una aplicación del contraste estadístico de homogeneidad para decidir sobre la significatividad estadística en la igualdad de dos tablas demográficas. Este enfoque supone incorporar al estudio de las tablas demográficas técnicas que son propias de los Métodos Estadísticos. Este es también el sentido del presente trabajo, en el que, como se ha indicado, en su segundo apartado se incorpora la técnica Input-Output (Leontief, 1958) al análisis de estas tablas, mientras que en el tercer epígrafe se define una medida tendente a comparar cómo incide un mismo fenómeno sobre las poblaciones representadas en sendas tablas demográficas.

2. Aplicación del esquema I/O a una tabla demográfica

Consideremos una tabla demográfica, definida a través de la serie de flujo de sucesos {D(x,x+1)}. Describe el comportamiento del fenómeno demográfico F, cuyo suceso característico A hemos supuesto irrepetible. También supondremos - de momento - que la intensidad del fenómeno estudiado no es la unidad. La generalización a este último caso será, como veremos, inmediata.

2.1 Lectura I/O de una tabla demográfica

Vamos a considerar a la serie básica del flujo de sucesos de la tabla demográfica como la estructura de edades de una población, y cuya referencia temporal es la expresada por dicha tabla. Esa estructura podría entenderse como la resultante de la evolución de una población afectada sólo por el fenómeno F, de forma que recoge, en ese momento, el resultado de la incidencia del suceso A edad por edad. Estaríamos dentro, pues, de la filosofía propia de una lectura demográfica transversal. Nos planteamos ahora cómo evolucionaría cada una de esas edades, a partir de este momento, sujetas a la incidencia del fenómeno F, con la intensidad y calendario para el mismo descrito por la tabla demográfica considerada.

En la metodología que vamos a desarrollar, cada una de las edades tiene el sentido que en el clásico esquema I/O tienen los sectores productivos o ramas de actividad. Por lo tanto, para cada edad x (o grupo de edades, en las tablas abreviadas, (x,x+a)), nos preguntamos cómo dichos efectivos "alimentan" la ocurrencia del suceso A en la misma edad (o grupo de edades) y en las edades superiores. Estos valores, para los efectivos iniciales L_0 de la tabla, constituyen la correspondiente serie de flujo de sucesos {D(x,x+1)}, que constituye la primera de las filas de la tabla I/O que pretendemos construir.

La segunda fila de la nueva tabla está constituida por la contribución del segundo grupo de edades, esto es, del efectivo de supervivientes L_1 a cada una de las edades igual o superior, al ser afectado ese total L_1 a la acción del suceso característico A. Por lo tanto, la segunda fila tendrá su primer elemento nulo, y los siguientes elementos serán los mismos de la serie de flujos de sucesos {D(x,x+1)}, repitiendo pues los valores de la fila anterior. Evidentemente el proceso es repetitivo hasta llegar a la última edad, ω-1, sobre la que actúa el suceso A.

La primera submatriz o cuadrante de la matriz básica del modelo abierto de Leontief, aplicada a nuestro caso es, pues, la siguiente:

$$[1]=\begin{pmatrix} D(x_0,x_o+1) & D(x_0+1,x_0+2) & \dots & D(x_0+k,x_0+(k+1)) & \dots & D(x_\omega-1,x_\omega) \\ 0 & D(x_0+1,x_0+2) & \dots & D(x_0+k,x_0+(k+1)) & \dots & D(x_\omega-1,x_\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(x_0+k,x_0+(k+1)) & \dots & D(x_\omega-1,x_\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & D(x_\omega-1,x_\omega) \end{pmatrix}$$

Esta submatriz, que es triangular, resume las relaciones entre las distintas edades de la estructura de los supervivientes de la tabla, con la estructura de edades de los afectados por el suceso A.

El segundo cuadrante es un vector columna, que en la terminología clásica del modelo I/O está constituida por la *demanda final* de cada sector productivo. En nuestro caso, la componente i-ésima de dicho vector estará definida por los no afectados por el suceso A de entre los efectivos iniciales que definen la fila, esto es, los efectivos poblacionales de edad i. Por tanto, y siguiendo con la lógica descrita para el cuadrante primero, el vector columna correspondiente a la demanda final tendrá todas sus componentes iguales a los supervivientes finales, esto es, los no afectados por el suceso A a lo largo de toda su posible vigencia de actividad. Denotándolos por L_{x_ω} , la segunda submatriz es la siguiente:

$$[2]=\begin{pmatrix} L_{x_\omega} \\ L_{x_\omega} \\ \dots \\ L_{x_\omega} \\ \dots \\ L_{x_\omega} \end{pmatrix}$$

Tal como se han definido los dos primeros cuadrantes, la suma - por filas - de los elementos de ambos proporciona la serie de supervivientes de la tabla demográfica correspondiente, L_i.

Las dos submatrices anteriores son las fundamentales en nuestro posterior análisis. No obstante, la matriz básica del modelo I/O se completa con otros dos cuadrantes. El tercero corresponde al vector fila de inputs primarios. La exigencia de coincidencia entre los inputs y outputs totales, para cada grupo de edades, obliga a que dicho vector fila

$$[3]=\begin{pmatrix} I_{x_0} & I_{x_0+1} & \dots & I_{x_0+k} & \dots & I_{x_\omega-1} \end{pmatrix}$$

esté definido a partir de las relaciones siguientes:

$$
\begin{gathered}
I_{x_0} = L_{x_0} - D(x_0, x_0+1) = L_{x_0+1} \\
I_{x_0+1} = L_{x_0+1} - 2 \cdot D(x_0+1, x_0+2) = L_{x_0+2} - D(x_0+1, x_0+2) \\
\ldots \\
I_{x_0+k} = L_{x_0+k} - (k+1) \cdot D(x_0+k, x_0+(k+1)) = L_{x_0+(k+1)} - k \cdot D(x_0+k, x_0+(k+1)) \\
\ldots \\
I_{x_\omega - 1} = L_{x_\omega} - (\omega - 1) \cdot D(x_\omega - 1, x_\omega)
\end{gathered}
$$

y en donde algunos elementos del vector [3] pueden tomar valores negativos.

El último cuadrante es un escalar $[4] = e$ que consolida la igualdad contable entre la suma de los inputs primarios y las demandas finales. En nuestro caso:

$$e = \omega . L_{x_\omega}$$

La consideración conjunta de los cuatro submatrices proporciona el siguiente esquema Input/Output de la tabla demográfica:

$$\begin{pmatrix} [1] & [2] \\ [3] & [4] \end{pmatrix}$$

cuyas equivalencias con la tabla I/O de sectores productivos de una economía ya han quedado descritas: en concreto, la demanda final de la tabla I/O son los supervivientes finales no afectados por el suceso característico A. Por ello, las *igualdades contables* en la tabla I/O anterior tienen ahora la siguiente traducción:

$$
\begin{gathered}
\sum_{x=x_0}^{x_0-1} D(x, x+1) + L_{x_\omega} = L_{x_0} \\
\sum_{x=x_0+1}^{x_0-1} D(x, x+1) + L_{x_\omega} = L_{x_0+1} \\
\ldots \\
\sum_{x=x_0+k}^{x_0-1} D(x, x+1) + L_{x_\omega} = L_{x_0+k} \\
\ldots \\
D(x_\omega - 1, x_\omega) + L_{x_\omega} = L_{x_\omega - 1}
\end{gathered}
$$

Una vez planteada así la tabla demográfica, podemos preguntarnos por la relación entre la estructura poblacional de supervivientes $\{L_x\}$, y la estructura de las frecuencias de ocurrencia del suceso A , hasta que sobre la población desaparezca la incidencia del fenómeno F .

Dentro del esquema clásico input-output, las *variables endógenas* (las explicadas) son las que constituyen la serie del flujo de sucesos {D(x,x+1)}, mientras que las *variables exógenas* (las que explican a las anteriores) son, precisamente, los supervivientes finales L_ω. Los parámetros del modelo son los denominados *coeficientes técnicos*, de los que existe uno para cada casilla del primer cuadrante de la tabla I/O. La matriz de coeficientes técnicos *Q* queda definida, pues, a partir de los elementos a_{ik} siguientes:

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & si \quad k < i \\ \dfrac{D(x_0 + k, x_0 + (k+1))}{L_{x_0+k}} = q_{x_0+k} & para \quad i,k = 0,1,2,\ldots,\omega - 1 \end{cases}$$

esto es, la serie condicionada $\{q_x\}$ de probabilidades de ocurrencia del suceso A . Su interpretación, en el esquema I/O, es el ya conocido (Stone, 1969): *a_{ik} expresa la cantidad de producto del sector i-ésimo que se necesita para producir una unidad de "output" del sector k-ésimo.* En términos demográficos, *a_{ik} expresa la cuantía en la que los supervivientes de edad (o grupo de edades) i-ésimo son alcanzados por el suceso A en la edad (o grupo de edades) k-ésimo.* Pero, en nuestro caso, el ser alcanzados por A en la edad "k" implica que no lo hayan sido antes de la misma, por lo que *a_{ik} expresa la cuantía en la que los supervivientes que llegan a la edad (o grupo de edades) exacta k-ésima son alcanzados por el suceso A antes de cumplir la edad exacta (k+1)-ésima (ó (k+a)-ésima, para edades agrupadas).*

Expresado en forma matricial, el sistema de ecuaciones del modelo abierto Input-Output es el siguiente:

$$Q.L+L_\omega=L$$

donde:

$$Q=\begin{pmatrix} q_{x_0} & q_{x_0+1} & q_{x_0+2} & \cdots & q_{x_0+k} & \cdots & q_{x_\omega-1} \\ 0 & q_{x_0+1} & q_{x_0+2} & \cdots & q_{x_0+k} & \cdots & q_{x_\omega-1} \\ 0 & 0 & q_{x_0+2} & \cdots & q_{x_0+k} & \cdots & q_{x_\omega-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{x_0+k} & \cdots & q_{x_\omega-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q_{x_\omega-1} \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} L_{x_0} \\ L_{x_0+1} \\ \cdots \\ L_{x_\omega-1} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad L_\omega=\begin{pmatrix} L_{x_\omega} \\ L_{x_\omega} \\ \cdots \\ L_{x_\omega} \end{pmatrix}$$

verificándose:

$$\frac{I_{x_0+k}}{L_{x_0+k}}+\sum_{j=0}^{k} q_{x_0+k}=1$$

En el sistema de ecuaciones anterior puede obtenerse cada *output total* (esto es, los efectivos correspondientes a la serie de supervivientes de la tabla de mortalidad) en función de los supervivientes finales L_ω, esto es, no afectados nunca por el suceso característico A. Operando en la ecuación matricial anterior:

$$L_\omega=(1-Q).L$$

donde 1 es la matriz unitaria de orden $\omega.\omega$. Premultiplicando los dos miembros de la anterior ecuación por la matriz inversa de 1-Q queda resuelto el sistema de ecuaciones, según:

$$L=(1-Q)^{-1}.L_\omega$$

que constituye la *expresión matricial del modelo abierto Input-Output en forma reducida*, al venir expresada cada variable endógena L_{x_i} en función de los supervivientes finales L_ω, para cierta matriz de coeficientes técnicos Q. En nuestro caso, las expresión de la matriz de coeficientes 1-Q es la siguiente:

$$1-Q=\begin{pmatrix} 1-q_{x_0} & -q_{x_0+1} & -q_{x_0+2} & ... & -q_{x_\omega-1} \\ 0 & 1-q_{x_0+1} & -q_{x_0+2} & ... & -q_{x_\omega-1} \\ 0 & 0 & 1-q_{x_0+2} & ... & -q_{x_\omega-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1-q_{x_\omega-1} \end{pmatrix}$$

mientras que la Matriz Inversa del modelo I/O resulta tener como elementos A_{ik} , i,k=0,1,2,...,ω-1 , donde:

$$A_{ik}=\begin{cases} 0 & si \quad i>k \\ \dfrac{1}{1-q_{x_0+k}} & si \quad i=k \\ \dfrac{q_{x_0+k}}{\prod_{j=i}^{k}(1-q_{x_0+j})} & si \quad i<k \end{cases}$$

dando lugar a la matriz $(1\text{-}Q)^{-1}$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-q_{x_0}} & \dfrac{q_{x_0+1}}{(1-q_{x_0})(1-q_{x_0+1})} & \dfrac{q_{x_0+2}}{(1-q_{x_0})(1-q_{x_0+1})(1-q_{x_0+2})} & ... & \dfrac{q_{x_\omega-1}}{(1-q_{x_0})(1-q_{x_0+1})...(1-q_{x_\omega-1})} \\ 0 & \dfrac{1}{1-q_{x_0+1}} & \dfrac{q_{x_0+2}}{(1-q_{x_0+1})(1-q_{x_0+2})} & ... & \dfrac{q_{x_\omega-1}}{(1-q_{x_0+1})(1-q_{x_0+2})...(1-q_{x_\omega-1})} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-q_{x_0+2}} & ... & \dfrac{q_{x_\omega-1}}{(1-q_{x_0+2})(1-q_{x_0+3})...(1-q_{x_\omega-1})} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \dfrac{1}{1-q_{x_\omega-1}} \end{pmatrix}$$

y toda vez que el determinante de la matriz 1-Q toma el valor:

$$|1-Q|=\prod_{k=0}^{\omega-1}(1-q_{x_0+k})=\prod_{k=0}^{\omega-1}p_{x_0+k}$$

y en donde $\{p_x\}$ son las correspondientes probabilidades condicionadas de supervivencia, complementarias de las de ocurrencia del suceso A. Así pues, la matriz inversa $(1\text{-}Q)^{-1}$ relaciona los supervivientes finales L_ω con la estructura de los supervivientes por edades $\{L_x\}$, para el nivel de intensidad y el calendario del fenómeno F expresados en la correspondiente tabla demográfica.

Respecto a la interpretación que proporciona esta presentación Input-Output, y dentro del esquema clásico en el análisis I/O (Alcaide, 1969; Stone, 1969), el elemento A_{ik} de la matriz inversa *representa la cuantía en que debe variar el "output" total del sector i-ésimo si se desea incrementar en una unidad la demanda final del sector k-ésimo.* En términos demográficos, el elemento A_{ik} de la matriz inversa *representa la cuantía en que deben variar los supervivientes que alcanzan la edad (o grupo de edades) i-ésima, exigida por el incremento unitario de un no afectado por el suceso característico A en la edad (o grupo de edades) k-ésima, y sin que dicho aumento suponga incrementos en los efectivos de las edades intermedias.*

Dentro de ese mismo análisis I/O, la suma de los elementos de la matriz inversa correspondientes a la fila i-ésima:

$$\sum_{k \geq i}^{\omega-1} A_{ik} \quad i=0,1,2,...,\omega\text{-}1$$

determina (Alcaide, 1969) *la cuantía en que debe variar la producción del sector i-ésimo si se desea incrementar en una unidad cada elemento de la demanda final.* En términos demográficos, esa suma de los elementos de una fila de la matriz inversa determina *la cuantía en la que deben variar los supervivientes que alcanzan la edad (o grupo de edades) i-ésima, exigida por incrementos unitarios de los no afectados por el suceso característico A en cada edad (o grupo de edades) iguales o mayores que la i-ésima.*

Finalmente, el análisis clásico determina también (Alcaide, 1969) que *la* suma de los elementos de la matriz inversa correspondientes a la columna k-ésima:

$$\sum_{k=0}^{k} A_{ik} \quad k=0,1,2,...,\omega\text{-}1$$

es *una medida del esfuerzo productivo conjunto de todas las ramas de actividad para que la demanda final del sector k-ésimo aumente en una unidad.* En términos demográficos, esa suma de los elementos de la columna k-ésima de la matriz inversa determina *el "esfuerzo conjunto" que deben hacer los supervivientes a todas las edades (o grupos de edades) iguales o anteriores* *a la k-ésima, exigido por el incremento unitario de un no afectado por el suceso característico A en la edad (o grupo de edades) k-ésima.*

Tal como se ha indicado con anterioridad, el hecho de que un individuo sea afectado por el suceso A a la edad k-ésima implica que no lo ha hecho antes de la misma. Por eso, la lectura I/O de una tabla demográfica presenta la ventaja de caracterizar más adecuadamente la relación entre el tiempo demográfico y el tiempo vivido. En efecto, de la Matriz Inversa del modelo I/O se obtiene, por agregación de sus elementos, la siguiente *tabla de análisis I/0*:

$$B = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & \dots & B_{0(\omega-1)} \\ 0 & B_{11} & \dots & B_{1(\omega-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{(\omega-1)(\omega-1)} \end{pmatrix}$$

donde:

$$B_{ik} = \begin{cases} 0 & si \quad i > k \\ \sum_{i \le k} A_{ik} & si \quad i \le k \end{cases}$$

La interpretación de los elementos de esta nueva matriz es evidente: B_{ik} *es la cantidad que debe incrementarse en el grupo de edades i-ésimo para que sobreviva a F una persona adicional en el grupo de edades k-ésimo.* Ello supone, claramente, que en todos los grupos de edades anteriores al k-ésimo haya habido también, al menos, un superviviente adicional. En términos demográficos, B_{ik} *es la cantidad en la que debe aumentar la edad (o grupo de edades) i-ésima para que haya un superviviente más al fenómeno demográfico F en la edad (o grupo de edades) k-ésima.* En definitiva, *por cada nuevo superviviente en la edad k-ésima, son necesarios* B_{ik} *efectivos adicionales en la edad i-ésima.*

2.2 Lectura I/O de la tabla demográfica de un fenómeno con intensidad unidad

Hasta ahora se ha supuesto que la intensidad del fenómeno demográfico F no es la unidad, por lo que tiene pleno sentido trabajar con el vector L_ω de supervivientes finales.

Cuando la intensidad sea uno - por ejemplo, para el fenómeno mortalidad – el vector de supervivientes finales es nulo. En este caso, para aplicar la lectura I/O anterior, el análisis se reduce al ya efectuado sin más que considerar una edad lo suficientemente avanzada a partir de la cual no se sigue estudiando la actividad del suceso característico A. Evidentemente, la elección de esa edad queda al arbitrio del analista.

De esta forma, en el caso de fenómeno demográfico con intensidad unidad, los supervivientes finales serían los que llegan a alcanzar esa edad sin ser afectados por la incidencia del suceso característico A (el fallecimiento, en el caso de la mortalidad). En definitiva, el análisis I/O se realizaría, en este caso, entre la estructura poblacional de supervivientes a cada edad y los supervivientes que alcanzan la edad decidida como final.

2.3 Aplicación

Vamos a aplicar algunas de las ideas del esquema propuesto ayudándonos de la nupcialidad (en primeras nupcias) de las mujeres españolas, correspondientes al período 1.956-65.

La tabla de nupcialidad correspondiente (Leguina, 1981) se recoge en la Tabla siguiente:

TABLA 1
Tabla de nupcialidad (datos por 1000)
Mujeres españolas, 1956-65

Edad	L_x	D(x,x+a)	q_x
15-20	1.000	72	72
20-25	928	469	505
25-30	459	319	695
30-35	140	93	664
35-40	47	34	723
40 y más	13		

Los datos a aplicar son los de la serie del flujo de casadas, {D(x,x+a)}, en donde se supone que a partir de los cuarenta años el número de primeros matrimonios de mujeres es despreciable, por lo que ésa es la edad a partir de la cual se definen los supervivientes finales. Con estos datos, la estructura de la tabla Input-Output inicial (submatrices [1] y [2]) es la siguiente:

TABLA 2
Tabla I/O de nupcialidad
Mujeres españolas, 1956-65

Edad de la población	*Edad al ser afectado por el suceso A*					*Solteras finales*	*Solteras de esa edad*
	15-20	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*		
15-20	72	469	319	93	34	13	1000
20-25	0	469	319	93	34	13	928
25-30	0	0	319	93	34	13	459
30-35	0	0	0	93	34	13	140
35-40	0	0	0	0	34	13	47

de la se obtiene la matriz de coeficientes técnicos siguiente:

TABLA 3
Tabla de coeficientes técnicos
Tabla I/O de nupcialidad
Mujeres españolas, 1956-65

Edad	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*
15-20	0.072	0.505	0.695	0.664	0.723
20-25	0	0.505	0.695	0.664	0.723
25-30	0	0	0.695	0.664	0.723
30-35	0	0	0	0.664	0.723
35-40	0	0	0	0	0.723

Deducimos de la anterior tabla, por ejemplo, que 0'695 (elemento (1,3) de la matriz) representa la cuantía (probabilidad) con la que las solteras existentes a los 15 años dejan de serlo entre los 25 y 30 años.

La matriz de coeficientes técnicos, como sustraendo de la matriz unidad, permite obtener la Matriz Inversa de la Tabla I/O siguiente:

TABLA 4
Matriz Inversa de la Tabla I/O de nupcialidad
Mujeres españolas, 1956-65

Edad	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*	*Total*
15-20	1.078	1.101	4.964	14.134	55.646	76.923
20-25	0	2.022	4.607	13.116	51.640	71.385
25-30	0	0	3.279	6.487	25.542	35.308
30-35	0	0	0	2.979	7.791	10.770
35-40	0	0	0	0	3.615	3.615
Total	1.078	3.123	12.850	36.716	144.234	

De su lectura se deduce, por ejemplo, que 13'116 (elemento (2,4) de la matriz) es la cuantía en la que deben aumentar las solteras del grupo de edades 20 a 25 años, asociado al incremento de una soltera respecto las casadas entre los 30 a 35 años, y sin que se produzcan variaciones en las edades intermedias.

Respecto al valor de la suma de la tercera fila de la matriz, 35'308, este valor supone la cuantía en la que deben aumentar las solteras del grupo de edades 25 a 30 años, exigido por incrementos de una soltera respecto las casadas en cada uno de los tres grupos de edades iguales o superiores.

El total de la cuarta columna, 36'716, es una medida del esfuerzo conjunto que deben experimentar los efectivos iniciales de solteras de todos los grupos de edad considerados, exigido para conseguir una soltera más respecto las casadas en el grupo de edades comprendido entre los 30 y 35 años.

Finalmente, la tabla para el análisis I/O de la nupcialidad de las mujeres españolas, es la siguiente:

TABLA 5
Tabla de análisis I/O para la nupcialidad
Mujeres españolas, 1956-65

Edad	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*
15-20	1.078	2.179	7.143	21.277	76.923
20-25	0	2.022	6.629	19.745	71.385
25-30	0	0	3.279	9.766	35.308
30-35	0	0	0	2.979	10.77
35-40	0	0	0	0	3.615

Y así, por ejemplo, 9.766 (elemento (3,4) de la matriz anterior) es la cuantía en la que deben incrementarse la población de solteras de 25 a 30 años de edad, para asegurar una soltera más en el grupo de edades de 30 a 35 años. Ello ha supuesto también, evidentemente, incrementos de solteras en el grupo de edad anterior.

De los comentarios anteriores se deduce la utilidad del análisis I/O efectuado, al poner en relación los posibles supervivientes finales con los efectivos iniciales que, en nuestra aplicación concreta, son las mujeres solteras.

3. Comparación de la incidencia de un fenómeno demográfico sobre dos poblaciones, expresada a través de sus tablas demográficas respectivas

Como aplicación teórica inmediata de la metodología anterior podemos presentar la definición de una medida del grado de acercamiento o alejamiento entre tablas demográficas referidas al mismo fenómeno demográfico F. Se comprende, pues, la posible aplicabilidad de la mediada que se desarrolla aquí a la hora de elegir tablas-tipo como descriptoras del comportamiento del hecho demográfico F y para una población cualquiera. Esto es, dadas dos tablas demográficas, podemos preguntarnos hasta qué punto difiere en más o en menos la descripción que realizan del mismo fenómeno F.

Es conocido, por otra parte, que los distintos niveles de incidencia del fenómeno F pueden venir descritos a través de indicadores sintéticos como, por ejemplo, la esperanza o el valor medio del calendario. Por ello, la diferencia entre los niveles de incidencia del fenómeno podría medirse comparando esos indicadores. Sin embargo, la medida ahora propuesta tiene en cuenta la incidencia de las diferencias observadas edad por edad, por lo que le confiere mayor claridad al combinar intensidad con calendario.

3.1. Definición de la medida

Sean, pues, dos tablas demográficas - que denotaremos por 1 y 2 - y que intentan acercarnos al comportamiento de cierto fenómeno demográfico sobre dos poblaciones que corresponden a territorios o momentos diferentes. Denotaremos por $\left\{L_x^1\right\}_{x=x_0}^{x_\omega}$ y $\left\{L_x^2\right\}_{x=x_0}^{x_\omega}$ las respectivas series de supervivientes. Consideraremos a la tabla 1 como la tabla base para la comparación y supondremos que ambas tienen la misma potencia, esto es, $L_{x_0}^1 = L_{x_0}^2$.

La lectura I/O realizada en el anterior apartado sobre ambas proporciona las siguientes ecuaciones matriciales:

$$L^1_\omega = (1-Q^1).L^1$$

$$L^2_\omega = (1-Q^2).L^2$$

en donde la aplicación de la respectiva matriz 1-Q, sobre su estructura de supervivientes, proporciona el vector constante cuyos elementos son iguales a los supervivientes finales al fenómeno F. Por tanto, la aplicación de $1-Q^1$ sobre L^2 da información a partir de la que puede construirse una medida del grado de representatividad de la tabla 1 al comportamiento del fenómeno F descrito por la tabla demográfica 2. A mayor diferencia entre el vector $(1-Q^1).L^2$ y el vector L^2_ω - que es constante - se concluye que la descripción de F por parte de la tabla demográfica 1 está más alejada de su verdadera incidencia sobre la población descrita por la tabla 2.

El siguiente resultado confirma la aseveración anterior:

Proposición

Siendo Q^1 la matriz obtenida por una lectura transversal I/O de una tabla demográfica, la aplicación de la matriz $1-Q^1$ sobre un vector columna que recoja la serie de supervivientes de otra tabla demográfica, da como resultado un vector constante solo, y sólo si, ese vector columna coincide con el definido a partir de la serie de supervivientes de la primera de las tablas. Esto es, y con la notación desarrollada:

$$(1-Q^1).L^2 = K \longleftrightarrow L^1 = L^2$$

donde K es un vector constante.

En efecto, la implicación inversa es evidente, por misma construcción del esquema desarrollado en el apartado 2.1 del epígrafe anterior, al ser $(1-Q^1).L^1 = L^1_\omega$ que es constante.

Para la implicación directa, siendo K un vector columna constante tal que

$$(1-Q^1)\cdot L^2 = K$$

entonces

$$L^2 = (1-Q^1)^{-1}\cdot K$$
$$L^1 = (1-Q^1)^{-1}\cdot L^1_\omega$$

De ahí que

$$\frac{1}{k}L^2 = (1-Q^1)^{-1}\cdot I$$
$$\frac{1}{l^1_\omega}L^1 = (1-Q^1)^{-1}\cdot I$$

donde I es el vector unidad, k es la constante que define al vector K y $l^1{}_\omega= L^1_{x_\omega}$ la constante que define al vector $L^1{}_\omega$, esto es, los supervivientes finales de la tabla 1. Por lo tanto

$$\frac{1}{k}L^2 = \frac{1}{l^1_\omega}L^1$$

lo que implica la igualdad entre las constantes k y $l^1{}_\omega$ y, por tanto, $L^2=L^1$ toda vez que el primer elemento de ambos vectores coincide y es igual a la potencia de las tablas demográficas consideradas, $L^1_{x_0} = L^2_{x_0}$.

c.q.d.

La medida propuesta para definir el grado de acercamiento o de alejamiento de la estructura L^2 a la que se deriva de la tabla demográfica 1 debería tener en cuenta:

1º el carácter constante, y por tanto, lineal, de los vectores

$$L^1{}_\omega =(1-Q^1).L^1$$
$$L^2{}_\omega =(1-Q^2).L^2$$

2º el alejamiento existente entre los vectores L^2_ω y $\hat{L}^2_\omega = (1-Q^1)\cdot L^2$.

De ahí que se proponga como medida la siguiente expresión, en donde el numerador es la media de los cuadrados de las desviaciones entre los elementos de L^2_ω y $\hat{L}^2_\omega$:

$$\boxed{\sigma^2 R = \frac{\dfrac{\sum_{i=x_0}^{x_\omega -1}(\hat{l}^2_{\omega,i} - l^2_\omega)^2}{\omega}}{(L_{x_0})^2}}$$

y en donde $\hat{l}^2_{\omega,i}$ es el elemento i-ésimo del vector $\hat{L}^2_\omega$; l^2_ω la constante que define al vector L^2_ω ; y $L_{x_0} = L^1_{x_0} = L^2_{x_0}$ la potencia de las tablas demográficas, que se introduce con el fin de adimensionar la medida. Como puede apreciarse, el alejamiento de $\sigma^2 R$ al cero expresa un aumento de la diferencia entre los niveles del fenómeno F descritos por ambas tablas demográficas.

Con notación matricial, la medida anterior tiene la siguiente expresión:

$$\sigma^2 R = \frac{1}{\omega\cdot(L_{x_0})^2}\times(L^2)'(Q^2-Q^1)'(Q^2-Q^1)L^2$$

donde A' expresa la matriz transpuesta de A.

Observemos que si el vector L^2_ω se asimilara al resultado de la regresión entre la edad y los elementos del vector $\hat{L}^2_\omega = (1-Q^1)\cdot L^2$, el numerador de la anterior medida resultaría ser la varianza residual de la misma.

El resultado de la proposición anterior asegura que $\sigma^2 R$, para una estructura L^2 distinta de L^1, no será nula. Por otra parte, la teoría general estadística garantiza la comparabilidad de esa medida entre distintas estructuras L^2, y para cada tabla demográfica, al considerar como media el valor constante l^2_ω, y toda vez que, por misma construcción, el valor que toma $\sigma^2 R$ cuando se construye sobre el mismo vector L^1 es cero.

3.2. *Aplicación*

Las *tablas-tipo* o *tablas-modelo* de mortalidad proporcionan las relaciones empíricas entre ciertos datos sobre la mortalidad conocidos, pero incompletos, y las series biométricas de una tabla de mortalidad abreviada. Su uso está muy extendido, y es de plena aplicabilidad en los procesos proyectivos. Tomando como base la tabla-tipo de mortalidad de Coale-Guo (1991) correspondiente al nivel 26 de la zona occidental, la aplicación permite valorar cuál de las tablas correspondientes a los niveles 25 y 27 están más próximas a la descripción que sobre la mortalidad realiza la tabla del nivel 26.

Considerando la última clasificación de la edad, de 100 y más años, como la de supervivientes finales, la matriz $1\text{-}Q^{26}$ obtenida por la aplicación de la metodología propuesta a la tabla-tipo de Coale-Guo correspondiente al nivel 26 para las mujeres, es la siguiente:

TABLA 6
Tabla 1-Q deducida de la Tabla-Tipo
de mortalidad del nivel 26 para las mujeres

Edad	*0*	*1*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*
0	0,996	-0,0015	-0,0005	-0,0004	-0,001	-0,0014	-0,0018	-0,0022	-0,0031	-0,0048
1	0	0,9985	-0,0005	-0,0004	-0,001	-0,0014	-0,0018	-0,0022	-0,0031	-0,0048
5	0	0	0,9995	-0,0004	-0,001	-0,0014	-0,0018	-0,0022	-0,0031	-0,0048
10	0	0	0	0,9996	-0,001	-0,0014	-0,0018	-0,0022	-0,0031	-0,0048
15	0	0	0	0	0,999	-0,0014	-0,0018	-0,0022	-0,0031	-0,0048
20	0	0	0	0	0	0,9986	-0,0018	-0,0022	-0,0031	-0,0048
25	0	0	0	0	0	0	0,9982	-0,0022	-0,0031	-0,0048
30	0	0	0	0	0	0	0	0,9978	-0,0031	-0,0048
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9969	-0,0048
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9952
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

45	*50*	*55*	*60*	*65*	*70*	*75*	*80*	*85*	*90*	*95*
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
-0,0075	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0,9925	-0,0119	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0,9881	-0,017	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0,983	-0,0264	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0,9736	-0,0413	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0	0,9587	-0,0736	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0	0	0,9264	-0,1419	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0	0	0	0,8581	-0,2643	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0	0	0	0	0,7357	-0,4375	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0	0	0	0	0	0,5625	-0,6355	-0,8087
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3645	-0,8087
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1913

de forma que la aplicación de esta matriz sobre los vectores de mujeres supervivientes correspondientes a las tablas-tipo de los niveles 25 y 27 da como resultado sendas estimaciones de las diferencias entre los vectores de supervivientes mujeres para los niveles 25 y 27, $\hat{L}_{\omega}^{25} = (1 - Q^{26}) \cdot L^{25}$ y $\hat{L}_{\omega}^{27} = (1 - Q^{26}) \cdot L^{27}$ recogidos en la tabla 7:

TABLA 7
Estimación de las diferencias entre los vectores de supervivientes mujeres correspondientes a los niveles 25 y 27

Edad	*Nivel 25*	*Nivel 27*
0	176635	-152132
1	174657	-150930
5	174363	-150668
10	173927	-150353
15	173564	-150098
20	173076	-149664
25	172727	-149353
30	172351	-149018
35	171787	-148514
40	170857	-147681
45	169435	-146407
50	167162	-144362
55	163949	-142024
60	158514	-137071
65	149770	-128985
70	134933	-114914
75	111030	-91213
80	79099	-57073
85	45864	-17177
90	22463	14697
95	13066	29171

De los vectores anteriores se obtienen los siguientes dos valores para la medida propuesta:

$$\sigma^2 R^{25} = 0'0194$$

$$\sigma^2 R^{27} = 0'0251$$

cuya comparación permite afirmar que el nivel de mortalidad descrito por la tabla-tipo del nivel 26 está más cercano al de la tabla-tipo del nivel 25 que al de la mortalidad descrito por la tabla-tipo de nivel 27.

Referencias bibliográficas

Alcaide, A. (1969): *Análisis Input-Output*. Guadiana de Publicaciones, Madrid.

Coale, A. y Guo, G**.** (1991): "Utilización de nuevas tablas modelo de mortalidad para tasas de mortalidad muy bajas en proyecciones demográficas". *Boletín de Población de las Naciones Unidas*, nº 30. Naciones Unidas. Nueva York.

Leguina, J. (1981, 3ª revisada): *Fundamentos de Demografía*. Ed.Siglo XXI, Madrid.

Leontief, W. (1958): *La Estructura de la Economía Americana*, *1919-1939*. Ed. José Mª Bosch, Barcelona.

Stone, R. y G. (1969): *Renta Nacional*, *Contabilidad Social y Modelos Económicos*. Ed. Oikos-Tau, Barcelona.

Veres (2000): "Comparación de dos tablas demográficas: aproximación a su significatividad estadística". *Qüestiió*, Volum 24, nº 1. Barcelona.

Veres (2000): "Aproximación a una medida de la discrepancia entre tablas demográficas". *Estadística Española*, nº 146, Julio-Diciembre 2000 (pendiente de aparición). Madrid.

Veres (2001): "Análisis I/O de una tabla de mortalidad". Aprobada su publicación en *Estadística Española*. Madrid.