

**CRECIMIENTO ÓPTIMO, DEPRECIACIÓN ENDÓGENA
Y SUBUTILIZACIÓN DEL CAPITAL***

Omar Licandro, Luis A. Puch y José Ramón Ruiz**

WP-EC 98-05

* Los autores agradecen el apoyo financiero del Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas (IVIE).

** O. Licandro: FEDEA, Universidad Carlos III (Madrid); L.A. Puch: Universidad Complutense (Madrid); J.R. Ruiz: Universitat de Valencia.

**Editor: Instituto Valenciano de
Investigaciones Económicas, S.A.**
Primera Edición Marzo 1998.
ISBN: 84-482-1714-4
Depósito Legal: V-606-1998
Impreso por Copisteria Sanchis, S.L.,
Quart, 121-bajo, 46008-Valencia.
Impreso en España.

CRECIMIENTO ÓPTIMO, DEPRECIACIÓN ENDÓGENA Y SUBUTILIZACIÓN DEL CAPITAL

Omar Licandro, Luis A. Puch y José Ramón Ruiz

RESUMEN

En este trabajo se examina la situación de equilibrio estacionario y el comportamiento dinámico de las principales variables de control de una economía en la cual se considera que la actividad de inversión está sujeta a costes de ajuste y que el mantenimiento de los bienes de capital deteriorados resulta costoso. El modelo de asignación intertemporal óptima de recursos que planteamos considera la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital como dos variables endógenas, integradas en el conjunto de variables de decisión. Uno de los resultados más sobresalientes es la infrautilización óptima y eficiente del capital. Por otra parte, los resultados derivados de la *golden rule* y la *modified golden rule* asociadas al modelo con depreciación endógena aseguran la eficiencia dinámica de la economía a lo largo de la trayectoria óptima. Finalmente, a lo largo de la senda de convergencia, el capital, la producción y el consumo *per capita*, así como la tasa de depreciación presentan una correlación positiva, mientras que la tasa de inversión y la tasa de utilización del capital aparecen inversamente relacionadas con las anteriores.

PALABRAS CLAVE: Crecimiento óptimo, depreciación endógena.

ABSTRACT

This paper examines the stationary equilibrium situation and the dynamic behavior of the main control variables of an economy where investment is subject to adjustment costs and the maintenance of deteriorated capital goods is considered expensive. The optimal intertemporal resources allocation model that we propose considers depreciation and capital utilization rates as two endogenous variables integrated in the decision group. One of the most outstanding results is the optimal and efficient subutilization of capital. On the other hand, the results derived from the golden rule and the modified golden rule associated to the endogenous depreciation model ensure the dynamic efficiency of the economy along the optimal path. Finally, from the convergence perspective, the capital, the production and the *per capita* consumption as well as the depreciation rate present positive correlation, whereas the investment and capital utilization have an inverse relationship to the previous ones.

KEY WORDS: Optimal growth, endogenous depreciation.

1. Introducción

La mayor parte de estudios económicos, tanto empíricos como teóricos, que analizan el proceso de acumulación de capital, adoptan como hipótesis de trabajo la exogeneidad de la depreciación. Dicha naturaleza exógena de la depreciación del capital se justifica, por una parte, en base a la consideración de tecnologías del tipo *putty-putty*, pero también se sustenta en gran medida en la percepción distorsionada que habitualmente se tiene del fenómeno del deterioro del capital, la cual ha acabado por elevar al rango de axioma la idea de una tasa de depreciación constante. Este *a priori* se manifiesta especialmente preocupante, por su carácter limitativo, en áreas como la teoría de la inversión y la teoría del crecimiento, o en relación al problema de la medición del capital.

Desde un punto de vista teórico, el problema de la variabilidad de la depreciación y su determinación endógena, en el marco de los modelos con tecnología de producción *putty-putty*, ha sido abordado recientemente en los trabajos de Escribá-Pérez y Ruiz-Tamarit (1996) y Ruiz-Tamarit (1995). Estos trabajos se plantean, bajo una perspectiva de equilibrio parcial para una empresa representativa actuando en un entorno competitivo, el reto de modelizar el proceso de toma de decisiones incluyendo la tasa de depreciación entre las variables de control. Para ello, se incorpora un mecanismo mediante el cual es posible reducir la depreciación por deterioro mediante la actividad de mantenimiento de los bienes de capital. Como contrapartida se obtiene, dada una cierta función de costes de mantenimiento, la especificación de una función de depreciación de naturaleza semejante a la tradicional función de inversión que nos ofrecen los modelos q de Tobin cuando suponemos la presencia de una función de costes de ajuste. En el segundo de los trabajos citados se incorpora además, bajo la hipótesis *depreciation-in-use*, la relación existente entre la depreciación por deterioro y la utilización del capital¹. Con ello se establece una relación a tres bandas entre la tasa de depreciación, la tasa de utilización del stock de capital y los costes de mantenimiento, en base a la cual se especifica un modelo cuyo equilibrio se caracteriza por la existencia de exceso de capacidad instalada, incluso bajo los supuestos de mercados competitivos, flexibilidad total de precios y una tecnología

¹ Distintas formulaciones y aplicaciones de esta hipótesis se pueden encontrar en Epstein y Denny (1980), Bischoff y Kokkelenberg (1987), Motahar (1992) y Burnside y Eichenbaum (1994).

que permite la sustituibilidad entre los factores². Desde este punto de vista, la infrutilización del capital resulta voluntaria y óptima.

En la literatura sobre crecimiento económico, el modelo estándar de crecimiento óptimo³ se caracteriza porque no permite la separación de las decisiones de ahorro de las familias de las decisiones de inversión de las empresas. Dicho modelo, aún cuando no se construye sobre la hipótesis de una tasa de ahorro constante como es el caso del modelo neoclásico de crecimiento de Solow-Swan, supone un comportamiento pasivo de la inversión, la cual se adapta automáticamente a las decisiones de ahorro. Por un lado, el modelo se construye sobre el supuesto de un único bien en la economía, lo cual determina una oferta de inversión perfectamente elástica. Por otro, la ausencia de costes de ajuste o de instalación asociados a la inversión proporciona una demanda de inversión perfectamente elástica. Las deficiencias que acarrea esta forma de proceder se han tratado de superar por dos vías. Por una parte, suponiendo dos sectores productivos, uno de bienes de consumo y otro de bienes de inversión. Este es el caso de Uzawa (1964). Alternativamente, mediante la introducción de costes de ajuste explícitos vinculados a la inversión en el programa de optimización. Esto es lo que se hace en el trabajo de Abel y Blanchard (1983).

Con todo lo anterior, se comprueba que existen alternativas al tratamiento inicialmente exógeno y pasivo de una variable tan importante como la inversión en los modelos de crecimiento económico. Sin embargo, una característica común a todos esos modelos es que la depreciación del capital se determina exógenamente a una tasa constante. Además, en todos ellos encontramos que el capital instalado se utiliza a plena capacidad. En este trabajo, partimos de la premisa de que tanto una como otra constituyen dos deficiencias fácilmente subsanables mediante la apropiada generalización del modelo dinámico de equilibrio general con costes de ajuste que se presenta en Abel y Blanchard (1983). La generalización que proponemos consiste en suponer que existen costes asociados al mantenimiento del capital instalado, los cuales dependen de las variables endógenas tasa de depreciación y grado de utilización del capital. En este modelo la tasa de depreciación y el grado de

² Ver Licandro y Puch (1995) y Licandro, Puch y Ruiz-Tamarit (1996), donde se plantean distintas aplicaciones de esta hipótesis mixta en el marco de los modelos de ciclo real, con datos de la economía de los EEUU y de España respectivamente.

³ El lector encontrará en los capítulos 2 y 3 de Barro y Sala-i-Martin (1995) una exposición amplia y detallada del modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans, así como de las condiciones que permiten establecer su equivalencia con el modelo de crecimiento óptimo, y un estudio panorámico del comportamiento de éste último bajo diferentes entornos institucionales.

utilización del capital se eligen optimamente junto con la tasa de inversión. En otras palabras, nuestro objetivo es analizar las modificaciones que se dan en el modelo estándar de crecimiento óptimo cuando introducimos los supuestos necesarios para la existencia de una función de inversión, una función de depreciación, y una función de subutilización del capital, bien definidas.

En este trabajo se plantea y resuelve el problema del crecimiento óptimo en el marco de un modelo dinámico de equilibrio general determinista absolutamente genérico, formulado en base a unas relaciones funcionales que caracterizaremos por los signos de sus primeras y segundas derivadas. En el apartado 2 describimos el entorno económico especificando las preferencias, la tecnología, las funciones de costes de ajuste y de mantenimiento y las restricciones globales que se imponen a los agentes económicos. En el apartado 3 se resuelve el problema de optimización al que se enfrenta una economía centralizada, y estudiamos las reglas de decisión relativas a las variables de control tasa de inversión, tasa de depreciación y tasa de utilización del capital. A continuación, en el apartado 4 se analiza el sistema dinámico hamiltoniano resultante de sustituir las funciones óptimas de control en las ecuaciones de Euler, tratando de identificar y caracterizar los posibles equilibrios de estado estacionario y estudiando el problema de la eficiencia intertemporal. La caracterización del sistema dinámico se hace extensiva al apartado 5 con el estudio de la propiedad de estabilidad dinámica y el análisis de las trayectorias óptimas. El instrumento básico que se utiliza para caracterizar cualitativamente la versión linealizada del sistema dinámico hamiltoniano es el diagrama de fase en combinación con la información recogida en su matriz jacobiana, la cual nos permite computar el signo de los autovalores. En este marco general se analiza también el comportamiento dinámico transicional de las principales variables del modelo. Finalmente, en el apartado 6 se ofrecen las conclusiones.

2. El entorno económico

En este apartado se describen los distintos elementos que configuran el entorno económico en el cual los agentes económicos existen y toman decisiones. Nuestro propósito es describir un modelo de economía neoclásica con ligeras modificaciones respecto a lo que ha constituido tradicionalmente el modelo básico de referencia en la literatura sobre crecimiento económico. Comenzaremos, pues, con la

descripción de las preferencias y la tecnología para, a continuación, describir los elementos particulares de este trabajo que lo hacen diferente de los demás, y finalmente concretaremos las restricciones del problema de crecimiento óptimo que se formulará y analizará en los apartados siguientes.

Las Preferencias

Empezaremos suponiendo que la economía está poblada por un gran número de unidades básicas de consumo o economías domésticas, que son idénticas entre sí y que viven un número infinito de periodos. Suponemos además que las preferencias de cada consumidor se pueden representar por medio de una función de utilidad, y que dicha función de utilidad es intertemporalmente separable de forma aditiva. Bajo estos supuestos, el bienestar de los consumidores se puede representar por la suma intertemporal descontada de la utilidad obtenida en cada periodo con el consumo correspondiente a dicho periodo. Si $c_t \equiv C_t/N_t$ representa el consumo *per capita*, obtenido como el cociente entre el consumo agregado de la economía C_t y la población total N_t , podemos escribir la función de utilidad de la siguiente forma:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} U(c_t) \cdot \exp\{-\beta t\} \cdot dt$$

Esta formulación supone que la utilidad del consumidor en el periodo 0 es una suma ponderada de todo el flujo futuro de utilidades instantáneas. La función de utilidad instantánea se supone que es continuamente diferenciable, creciente y estrictamente cóncava en c_t ; esto es, $U'(c_t) > 0$ y $U''(c_t) < 0$ ⁴. Además, también se supone que se satisfacen las condiciones: $\lim_{c_t \rightarrow 0} U'(c_t) = \infty$ y $\lim_{c_t \rightarrow \infty} U'(c_t) = 0$. Finalmente, en la expresión anterior, el parámetro β es la tasa de descuento que el consumidor aplica a la utilidad futura, y representa su tasa de preferencia temporal. Aquí supondremos que esta tasa es constante⁵.

⁴ El supuesto de concavidad en la función de utilidad implica que los consumidores prefieren un patrón de consumo relativamente uniforme a lo largo del tiempo.

⁵ Para una discusión más en profundidad sobre este punto ver Uzawa (1968).

La Tecnología

Nos encontramos en un entorno económico caracterizado por la existencia de un único sector productivo en el cual el *output* Y es un bien homogéneo que puede ser consumido, contribuyendo a aumentar el bienestar inmediato de las unidades básicas de consumo, o puede dedicarse a los distintos usos que contribuyen a acrecentar el stock de capital físico de la economía: inversión y mantenimiento. La tecnología con la cual están dotadas las unidades básicas de producción se puede describir mediante la siguiente función de producción agregada:

$$(2) \quad Y_t = F(L_t, KU_t)$$

Esta función nos indica que las cantidades de *output* producidas dependen de las cantidades utilizadas de los dos factores de producción existentes en nuestra economía: capital físico y trabajo. El *input* trabajo L_t puede variar por diversos motivos tales como el crecimiento de la población y las variaciones en el número de horas trabajadas por el trabajador individual. Sin embargo, aquí nos desentendemos de la elección renta-ocio, determinante de la oferta individual de trabajo, suponiendo que cada miembro de la fuerza laboral trabaja a una intensidad dada y ofrece un número fijo de horas h que normalizamos a la unidad. Bajo estas simplificaciones podemos hacer corresponder la fuerza laboral L_t con la población N_t . Por otra parte, suponemos también que se dan todas las condiciones relativas a fertilidad, migraciones, mortalidad y tasas de participación, necesarias para generar un crecimiento constante y exógeno de la población a la tasa n . Esto es:

$$(3) \quad L_t = N_t = N_0 \cdot \exp\{nt\}$$

Finalmente, una simplificación adicional nos lleva a normalizar el tamaño inicial de la población considerando $N_0=1$.

Por lo que respecta al otro factor de producción, el capital físico utilizado en el proceso productivo se determina como una proporción variable u_t del stock de capital instalado K_t . Esta variable representa la tasa de utilización del capital productivo y toma valores entre cero y la unidad. Podemos, pues, escribir:

$$(4) \quad KU_t = K_t \cdot u_t$$

Con todos los supuestos anteriores podemos volver sobre la definición de la tecnología y escribir la función de producción como sigue:

$$(5) \quad Y_t = F(N_t, K_t \cdot u_t)$$

Con esta especificación de la función de producción implícitamente se ha supuesto que no existe progreso técnico. Esto nos indica que las mismas cantidades físicas de capital y de trabajo utilizadas en periodos diferentes nos ofrecen la misma cantidad de *output*⁶.

Los supuestos sobre la función de producción los podemos agrupar en tres bloques. Primero, las productividades marginales son funciones positivas: $F_1 > 0$, $F_2 > 0$, y decrecientes: $F_{11} < 0$, $F_{22} < 0$. Los factores productivos se suponen cooperantes, y de acuerdo con el teorema de Young tenemos: $F_{12} = F_{21} > 0$. Segundo, la función $F(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno en sus determinantes, por lo que presenta rendimientos constantes a escala. Esta propiedad se puede expresar analíticamente por cualquiera de las relaciones siguientes:

$$F(L_t, KU_t) = F_1(L_t, KU_t) \cdot L_t + F_2(L_t, KU_t) \cdot KU_t$$

$$(6) \quad F_{11} \cdot F_{22} - F_{12}^2 = 0$$

$$\frac{KU_t}{L_t} = \frac{K_t \cdot u_t}{N_t} = - \frac{F_{11}}{F_{21}} = - \frac{F_{21}}{F_{22}}$$

Tercero, se satisfacen las condiciones de Inada según las cuales el producto marginal de los factores productivos capital físico y trabajo se aproximan a infinito (tienden a cero) cuando las cantidades de los factores capital y trabajo, respectivamente, se acercan a cero (infinito).

La anterior condición de rendimientos constantes a escala implica también que la función de producción puede escribirse de la siguiente forma:

⁶ Las implicaciones de este supuesto en el modelo que estamos considerando son meramente formales y no afectan al fondo de la cuestión sobre la cual trata el presente trabajo. En cualquier caso, la inclusión de progreso técnico exógeno evolucionando a una tasa constante entre las propiedades originales de nuestro modelo, tan sólo nos obligaría a reescalar las variables, definiéndolas en términos de unidades de trabajo eficiente, y a considerar el estado estacionario como una situación en la cual las variables relevantes no permanecen constantes sino que crecen a una tasa que vendría determinada por la suma de las tasas de progreso técnico exógeno y de crecimiento de la población.

$$(7) \quad F(N_t, K_t \cdot u_t) = N_t \cdot F(1, k_t \cdot u_t) = N_t \cdot f(k_t \cdot u_t)$$

En esta expresión hemos introducido la definición del stock de capital *per capita*, $k_t \equiv K_t/N_t$. Ahora, utilizando la definición de la producción *per capita*, $y_t \equiv Y_t/N_t$, podemos especificar la función de producción en forma intensiva:

$$(8) \quad y_t = f(k_t \cdot u_t)$$

Respecto a la función $f(\cdot)$ supondremos que es no negativa, dos veces diferenciable, creciente y cóncava: $f'(k_t \cdot u_t) > 0$ y $f''(k_t \cdot u_t) < 0$. Las condiciones de Inada referidas a la función de producción escrita en forma intensiva implican:

$$(9) \quad \lim_{k_t \cdot u_t \rightarrow 0} f'(k_t \cdot u_t) = \infty$$

$$(10) \quad \lim_{k_t \cdot u_t \rightarrow \infty} f'(k_t \cdot u_t) = 0$$

Los Costes de Ajuste y de Mantenimiento

La producción obtenida con la tecnología que acabamos de describir puede asignarse al consumo, y con ello satisfacer las necesidades y el bienestar presente de las familias, o puede dedicarse a las actividades encaminadas a sostener y aumentar el acervo de bienes de capital, con lo cual las empresas podrán realizar en el futuro una producción mayor. Estas actividades son dos: el mantenimiento y la inversión. Asociados al mantenimiento y a la inversión nos encontramos con los dos elementos diferenciales de este trabajo con respecto a los que constituyen el problema de crecimiento óptimo estándar. Los elementos a los que nos referimos son los costes de mantenimiento del capital y los costes de ajuste asociados a la inversión. En relación a estos últimos, en este trabajo nos mantenemos fieles al enfoque adoptado en Abel y Blanchard (1983), con las únicas modificaciones referidas a la definición de las variables y a las que de ello se derivan necesariamente para adaptar el discurso al entorno institucional que estamos configurando.

Consiguientemente, se supone que existen asociados a la inversión bruta unos costes de ajuste o de instalación internos, expresados en términos de unidades de producto, que son estrictamente necesarios para realizar la inversión pero que no

contribuyen, directa y algebraicamente, al incremento del stock de capital. Estos costes totales de instalación los expresaremos mediante la función $\Phi(I_t, K_t)$, dependiendo tanto del volumen de inversión bruta (positivamente) como del stock de capital instalado (negativamente). Supongamos que la función de costes de ajuste es homogénea de grado uno simultáneamente en todos sus determinantes con lo que obtenemos las siguientes relaciones:

$$\Phi(I_t, K_t) = \Phi_I(I_t, K_t) \cdot I_t + \Phi_K(I_t, K_t) \cdot K_t$$

$$(11) \quad \Phi_{II} \cdot \Phi_{KK} - \Phi_{IK}^2 = 0$$

$$\frac{K_t}{I_t} = - \frac{\Phi_{II}}{\Phi_{KI}} = - \frac{\Phi_{KI}}{\Phi_{KK}}$$

Ahora podemos escribir la función de costes de ajuste en forma intensiva definiendo la variable tasa de inversión $i_t \equiv I_t/K_t$.

$$(12) \quad \Phi(I_t, K_t) = \Phi(i_t, 1) \cdot K_t = \phi(i_t) \cdot K_t$$

Respecto a la función $\phi(i_t)$ supondremos que es no negativa, dos veces diferenciable, creciente y convexa: $\phi(i_t) > 0 \forall i_t > 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(i_t) > 0$ y $\phi''(i_t) > 0$. Finalmente, Si definimos el coste de ajuste *per capita* obtenemos la siguiente expresión:

$$(13) \quad \frac{\Phi(I_t, K_t)}{N_t} = \phi(i_t) \cdot k_t$$

Por otra parte, de acuerdo con los comentarios de la introducción respecto a los problemas que comporta el fenómeno de la depreciación variable y al tratamiento que recibe en la literatura, aquí adoptaremos el enfoque de Ruiz-Tamarit (1995). En dicho trabajo la hipótesis *depreciation-in-use* se complementa incorporando una tecnología de mantenimiento. Según este mecanismo, el deterioro provocado por el envejecimiento y el uso de los bienes de capital puede ser contrarrestado mediante la actividad de mantenimiento, asumiendo los costes correspondientes y evitando así la depreciación. En este escenario, el exceso de capacidad y la correspondiente infrautilización del stock de capital son valorados positivamente por las empresas puesto que facilitan el mantenimiento de los bienes de capital deteriorados y permiten ahorrar en gastos asociados a dicho mantenimiento.

Los costes totales de mantenimiento dependen negativamente del volumen de depreciación D_t y positivamente de la utilización del capital KU_t . Los costes de mantenimiento correspondientes al capital depreciado y al capital no utilizado se suponen nulos. Analíticamente se puede escribir la siguiente función para representar los costes totales de mantenimiento:

$$(14) \quad M_t = M(D_t, KU_t)$$

En esta expresión, se supone que las primeras derivadas de la función con respecto a sus argumentos presentan los siguientes signos: $M_1 \leq 0$, $M_2 \geq 0$. Además, consideramos que la función $M(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno en sus determinantes tomados conjuntamente, por lo que la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(15) \quad M_t = m(\delta_t, u_t) \cdot K_t$$

En la anterior expresión, el término $m(\delta_t, u_t)$ representa el coste medio de mantenimiento. La tasa de depreciación variable δ_t se define como el cociente entre el volumen de depreciación total D_t y el stock de capital K_t . La variable u_t define la proporción del capital instalado que se utiliza en cada periodo, y expresa el efecto que el uso de los bienes de capital tiene sobre la depreciación de los mismos, o alternativamente sobre los costes de mantenimiento. A continuación caracterizamos la función de coste medio de mantenimiento del capital suponiendo:

$$(16) \quad \begin{aligned} m(\delta_t, u_t) &\geq 0, \quad \forall \bar{\delta} \leq \delta_t \leq 1 \text{ y } 0 \leq u_t \leq 1; \\ m(1, u_t) &= 0, \quad \forall 0 \leq u_t \leq 1; \\ m(\delta_t, 0) &= 0, \quad \forall \bar{\delta} \leq \delta_t \leq 1; \\ m_1 &< 0, \quad m_2 > 0; \\ m_{11} &> 0, \quad m_{22} > 0, \quad m_{12} < 0, \quad m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0. \end{aligned}$$

El coste medio es siempre no negativo, decreciente con la tasa de depreciación y creciente con la tasa de utilización del capital. Además, la función de coste medio se supone estrictamente convexa. El valor $\bar{\delta}$ representa la tasa de depreciación mínima, correspondiente a la depreciación provocada por el estricto deterioro físico del capital, que se observa sólo como consecuencia de una actividad de mantenimiento llevada a su máximo nivel.

Finalmente, Si definimos el coste de mantenimiento del capital *per capita* obtenemos la siguiente expresión:

$$(17) \quad \frac{M_t}{N_t} = m(\delta_t, u_t) \cdot k_t$$

Las Restricciones

En primer lugar tenemos la ecuación de acumulación de capital:

$$(18) \quad \dot{K}_t = I_t - \delta_t \cdot K_t$$

El término $\dot{K}_t \equiv dK_t/dt$ representa las variaciones experimentadas por el stock de capital, obtenidas como resultado de las diferentes decisiones que las empresas toman sobre la inversión bruta I_t y la tasa de depreciación δ_t . Si escribimos las anteriores variables en términos *per capita*, dividiendo por el volumen de población N_t y sustituimos por la variable tasa de inversión, i_t , y la tasa de crecimiento exógena de la población, n , nos queda la siguiente expresión representativa del proceso de acumulación de capital:

$$(19) \quad \dot{k}_t = (i_t - \delta_t - n) \cdot k_t$$

Por otra parte, la restricción global de recursos la podemos formular de la siguiente manera:

$$(20) \quad F(N_t, K_t, u_t) - \Phi(I_t, K_t) - M(D_t, K_t, u_t) = C_t + \dot{K}_t + \delta_t \cdot K_t$$

Esta restricción nos indica que la producción neta de costes de ajuste y de mantenimiento puede asignarse libremente al consumo o a la inversión bruta. Teniendo en cuenta la restricción (19), y conjuntamente con lo que hemos visto más arriba en relación a la tecnología, ecuación (8), a los costes de ajuste, ecuación (13), y a los costes de mantenimiento, ecuación (17), podemos ahora reescribir la restricción (20) como sigue:

$$(21) \quad c_t + \dot{k}_t + (\delta_t + n) \cdot k_t = f(k_t, u_t) - [\phi(i_t) + m(\delta_t, u_t)] \cdot k_t$$

Alternativamente, prescindiendo de las variables que aparecen escritas en términos diferenciales también podemos escribir:

$$(22) \quad c_t = f(k_t \cdot u_t) - [i_t + \phi(i_t) + m(\delta_t, u_t)] \cdot k_t$$

Otra forma de leer la restricción global de recursos es, pues, que el consumo *per capita* no puede ser mayor que la correspondiente producción después de descontar todos los recursos asignados a las actividades relacionadas con el acrecentamiento del stock de capital físico de la economía.

3. El problema de optimización de una economía centralizada

De acuerdo con los planteamientos del apartado anterior, estamos considerando un modelo estándar de crecimiento óptimo con horizonte infinito, en el cual la economía está compuesta por familias y empresas competitivas. En ausencia de externalidades e información asimétrica, la solución del problema obtenida mediante el supuesto de un planificador central coincide con la solución competitiva obtenida de forma descentralizada a través de la competencia entre empresas y del comportamiento optimizador de las familias. Por ello, sin pérdida de generalidad, en este apartado analizaremos el caso de una economía gobernada por un planificador central benevolente que toma decisiones sobre las variables de control tasa de inversión, tasa de depreciación y tasa de utilización del capital, las cuales afectan al estado de la economía representado por la variable capital *per capita*. El problema del control óptimo consiste pues en elegir los valores de dichas variables tales que maximicen la siguiente expresión:

$$(23) \quad \int_0^{\infty} U(c_t) \cdot N_t \cdot \exp\{-\beta t\} \cdot dt$$

sujeto a las restricciones dadas en las ecuaciones (19) y (22) del apartado anterior.

La expresión (23) constituye un indicador del bienestar de la comunidad cuando ésta está constituida por individuos con idénticas preferencias que extraen

la misma satisfacción de un cierto volumen de consumo. Dado el supuesto de la ecuación (3) respecto al crecimiento de la población y la normalización del tamaño inicial de la población, podemos reescribir la función objetivo de la siguiente manera:

$$(24) \quad \int_0^{\infty} U(c_t) \cdot \exp\{-(\beta-n)t\} \cdot dt$$

Ahora, para que el problema esté bien definido, el valor del integrando debe tender a cero cuando t tiende a infinito. Esto se puede garantizar, dada la caracterización de la función de utilidad que hemos hecho en el apartado anterior, suponiendo $\beta > n$, la tasa de descuento intertemporal mayor que la tasa de crecimiento de la población⁷.

Volviendo al problema de maximización que tenemos planteado, de acuerdo con los postulados generales de la teoría del control óptimo podemos escribir la siguiente función hamiltoniana en términos de valor presente:

$$(25) \quad H(i_t, \delta_t, u_t, k_t, \mu_t) = U(f(k_t \cdot u_t) - [i_t + \phi(i_t) + m(\delta_t, u_t)] \cdot k_t) + \mu_t \cdot [(i_t - \delta_t - n) \cdot k_t]$$

El principio del máximo de Pontryagin⁸ establece como condiciones necesarias para la existencia de una solución interior⁹:

$$(26) \quad 0 = H_i = -U'(c) \cdot [1 + \phi'(i)] \cdot k + \mu \cdot k$$

$$(27) \quad 0 = H_{\delta} = -U'(c) \cdot m_1(\delta, u) \cdot k - \mu \cdot k$$

$$(28) \quad 0 = H_u = U'(c) \cdot [f'(k \cdot u) \cdot k - m_2(\delta, u) \cdot k]$$

⁷ Para asegurar la convergencia de la integral, dada la naturaleza exponencial del factor de descuento en la ecuación (24), se podría incluso aceptar el supuesto de que el integrando $U(c_t)$ crezca a una tasa exponencial constante, siempre y cuando ésta sea inferior a $\beta - n$. En Chiang (1992) el lector encontrará condiciones más generales para la convergencia de la función integral objetivo.

⁸ Ver Seierstad y Sydsaeter (1987).

⁹ Con el objetivo de simplificar la nomenclatura, en lo que sigue suprimiremos el subíndice temporal correspondiente al periodo t .

$$\begin{aligned}
(29) \quad \dot{\mu} &= - H_k + (\beta - n) \cdot \mu \\
&= - \{ U'(c) \cdot [f'(k \cdot u) \cdot u - [i + \phi(i) + m(\delta, u)]] + \mu \cdot (i - \delta - n) \} + (\beta - n) \cdot \mu \\
&= - \{ U'(c) \cdot [f'(k \cdot u) \cdot u - i - \phi(i) - m(\delta, u)] \} + \mu \cdot (\beta + \delta - i)
\end{aligned}$$

$$(30) \quad \dot{k} = H_{\mu} = (i - \delta - n) \cdot k$$

Supongamos que la función hamiltoniana es estrictamente cóncava en las variables de control, lo cual nos asegura la continuidad de las funciones solución¹⁰. Bajo este supuesto, las condiciones anteriores son al mismo tiempo suficientes. Además, la condición de transversalidad correspondiente a este problema caracterizado por un horizonte de programación infinito es:

$$(31) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \cdot k \cdot \exp\{-(\beta - n)t\} = 0$$

Con el objetivo de simplificar la nomenclatura y facilitar la interpretación de las expresiones analíticas que siguen, realizaremos las sustituciones siguientes: $\lambda = \mu / U'(c)$ y $U'(c) \equiv \eta$. Si además tenemos en cuenta que por definición $-U''(c) \cdot c / U'(c) = 1/\sigma(c)$, donde $\sigma(c)$ representa la elasticidad de sustitución intertemporal, y que $(\dot{\eta}/\eta) = (-1/\sigma(c)) \cdot (\dot{c}/c)$, podemos reescribir las condiciones de primer orden del problema de maximización de la siguiente manera:

$$(26') \quad \lambda = 1 + \phi'(i)$$

$$(27') \quad \lambda = - m_1(\delta, u)$$

$$(28') \quad f'(k \cdot u) = m_2(\delta, u)$$

$$(29') \quad \dot{\lambda} = i + \phi(i) + m(\delta, u) - f'(k \cdot u) \cdot u + \lambda \cdot [\beta + \delta - i - (\dot{\eta}/\eta)]$$

Diferenciando las condiciones (26'), (27') y (28') y resolviendo para di , $d\delta$ y du , podemos determinar el signo de los efectos parciales de cada uno de los determinantes de las siguientes funciones óptimas de control: $i=i(k, \lambda)$, $\delta=\delta(k, \lambda)$ y $u=u(k, \lambda)$. Estos signos son:

¹⁰ Para ello, es condición suficiente que la matriz hessiana construida con las derivadas segundas con respecto a las variables de control sea definida negativa.

$$(32) \quad \frac{\partial i_t}{\partial k_t} = 0, \quad \frac{\partial i_t}{\partial \lambda_t} > 0, \quad \frac{\partial \delta_t}{\partial k_t} < 0, \quad \frac{\partial \delta_t}{\partial \lambda_t} < 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial k_t} < 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial \lambda_t} < 0.$$

En forma matricial podemos escribir:

$$(32') \quad \begin{bmatrix} di \\ d\delta \\ du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\phi''} \\ \frac{-m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|} & \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \\ \frac{m_{11} \cdot f'' \cdot u}{|A|} & \frac{m_{21}}{|A|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dk \\ d\lambda \end{bmatrix}$$

donde $|A| = m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} - m_{11} \cdot f'' \cdot k > 0$.

El detalle de todos estos efectos directos e indirectos sobre las variables de control se puede mostrar también ilustrando la información contenida en las anteriores condiciones de primer orden (26')-(28'), tal y como se hace en los siguientes gráficos.

Antes de seguir y pasar al estudio del estado estacionario, podemos preguntarnos cómo los anteriores efectos sobre las variables de control pueden trasladarse tanto al consumo *per capita* como a la producción *per capita*. Para ello acudimos a las ecuaciones (22) y (8) y sustituimos en ellas las funciones óptimas de control de manera ambas variables queden expresadas en términos de la variable de estado k y del multiplicador λ . Esto es:

$$(22') \quad c(k, \lambda) = f(k \cdot u(k, \lambda)) - [i(k, \lambda) + \phi(i(k, \lambda)) + m(\delta(k, \lambda), u(k, \lambda))] \cdot k$$

$$(8') \quad y(k, \lambda) = f(k \cdot u(k, \lambda))$$

A partir de los resultados ofrecidos en la matriz de la expresión (32') y las condiciones de primer orden, ecuaciones (27')-(29'), los correspondientes efectos parciales sobre el consumo *per capita* y la producción *per capita* vienen dados por las siguientes expresiones generales cuyo signo se detalla a continuación:

Gráfico 1.

El efecto de un $\Delta\lambda$ sobre i .

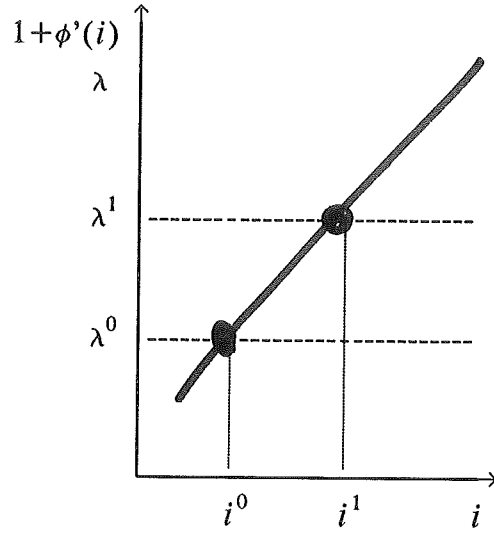


Gráfico 2.

El efecto de un Δk sobre δ .

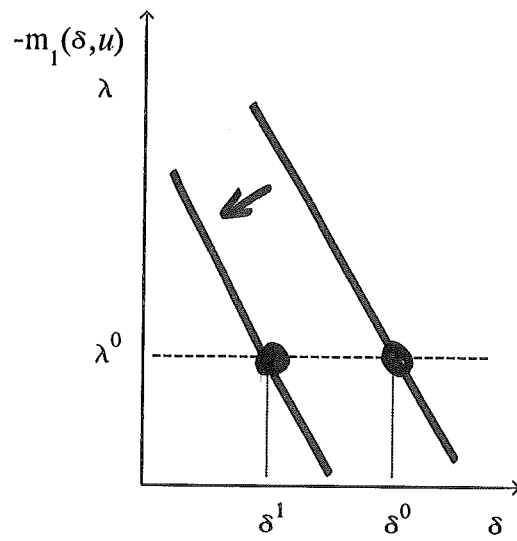


Gráfico 3.
El efecto de un $\Delta\lambda$ sobre δ .

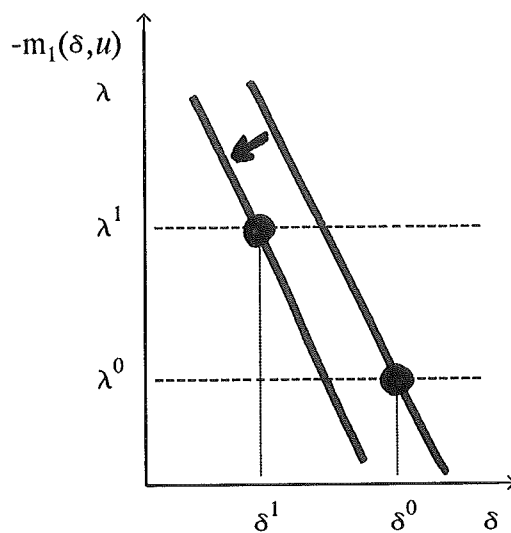


Gráfico 4.
El efecto de un Δk sobre u .

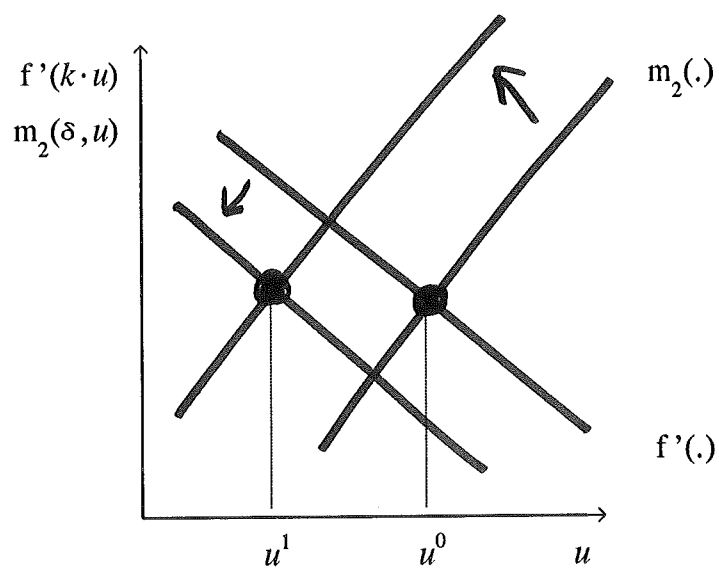


Gráfico 5.
El efecto de un $\Delta\lambda$ sobre u .

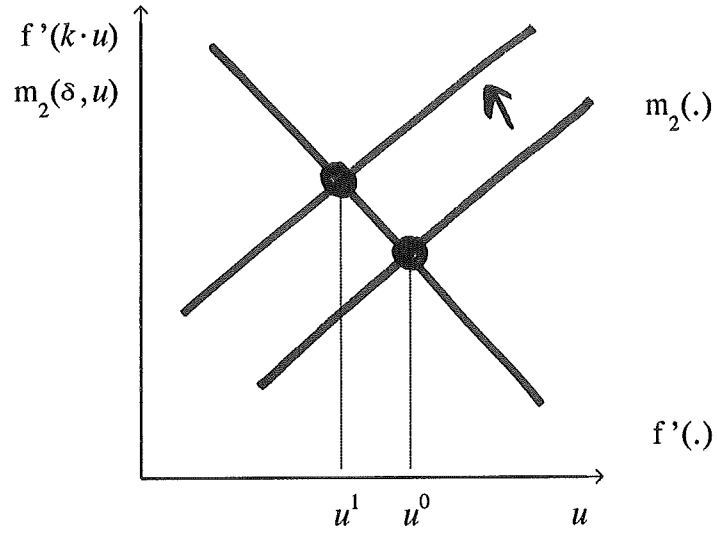
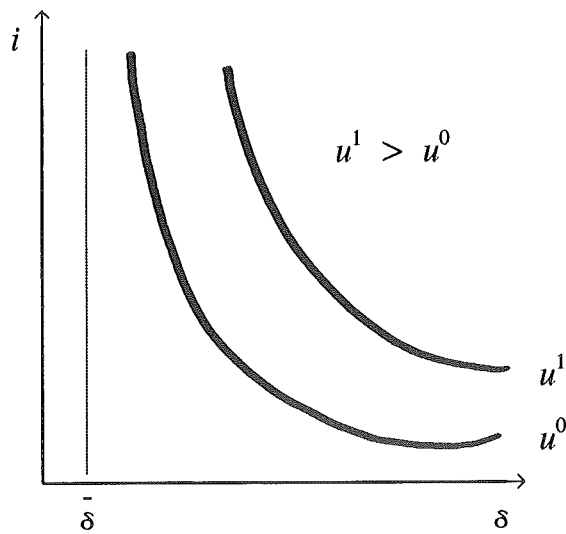


Gráfico 6.
La relación entre tasa de inversión (i) y tasa de depreciación (δ).



$$\begin{aligned}
(33a) \quad \frac{\partial c_t}{\partial k_t} &= f' \cdot \left[u + k \cdot \frac{\partial u}{\partial k} \right] - \left[i + \phi(i) + m(\delta, u) \right] - k \cdot \left[m_1 \cdot \frac{\partial \delta}{\partial k} + m_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial k} \right] \\
&= \lambda \cdot \left[\beta + \delta - i - (\dot{\eta}/\eta) - (\dot{\lambda}/\lambda) - \frac{k \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|} \right] \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(33b) \quad \frac{\partial c_t}{\partial \lambda_t} &= f' \cdot k \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} - k \cdot \left[(1 + \phi'(i)) \cdot \frac{\partial i}{\partial \lambda} \right] - k \cdot \left[m_1 \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} + m_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] \\
&= -k \cdot (1 + \phi'(i)) \cdot \frac{\partial i}{\partial \lambda} - k \cdot m_1 \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} < 0
\end{aligned}$$

$$(34a) \quad \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = f' \cdot \left[u + k \cdot \frac{\partial u}{\partial k} \right] = f' \cdot u \cdot \left[1 - \frac{-k \cdot m_{11} \cdot f''}{|A|} \right] > 0$$

$$(34b) \quad \frac{\partial y_t}{\partial \lambda_t} = f' \cdot k \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} = f' \cdot k \cdot \frac{m_{21}}{|A|} < 0$$

4. El estado estacionario

Consideremos el sistema dinámico de tipo hamiltoniano modificado de las ecuaciones (30) y (29'). En ellas sustituimos las funciones óptimas de control deducidas en el apartado anterior. El sistema dinámico resultante lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$(35) \quad \dot{k} = (i(k, \lambda) - \delta(k, \lambda) - n) \cdot k = \Pi(k, \lambda, a, n)$$

$$\begin{aligned}
(36) \quad \dot{\lambda} &= i(k, \lambda) + \phi(i(k, \lambda)) + m(\delta(k, \lambda), u(k, \lambda)) - f'(k \cdot u(k, \lambda)) \cdot u(k, \lambda) \\
&\quad + \lambda \cdot \left[\beta + \delta(k, \lambda) - i(k, \lambda) - (\dot{\eta}/\eta) \right] = \Gamma(k, \lambda, a, \beta)
\end{aligned}$$

En estas ecuaciones dinámicas el término « \mathbf{a} » representa un vector fila cuyos elementos son los parámetros que caracterizan la función de utilidad, la función de producción, la función de costes de ajuste y la función de costes de mantenimiento¹¹. Los parámetros β y n representan, respectivamente, la tasa de preferencia temporal y la tasa de crecimiento de la población.

El anterior sistema hamiltoniano es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, que describe el comportamiento dinámico de la única variable de estado del problema: el capital *per capita* k , así como de la variable de coestado λ . La solución de estado estacionario generalmente no puede obtenerse de manera explícita. Aquí, además, debemos asumir las consecuencias de trabajar con formas funcionales genéricas, lo cual no es una barrera insalvable siempre que caractericemos suficientemente dichas funciones para permitir un análisis cualitativo en el entorno de los estados estacionarios. Las soluciones al sistema dinámico (35)-(36), las podemos escribir en forma genérica como funciones parametrizadas dependientes del tiempo: $\hat{k}(t, \mathbf{a}, \beta, n)$ y $\hat{\lambda}(t, \mathbf{a}, \beta, n)$. Consiguientemente, podemos volver sobre la funciones de control especificando las reglas sobre la inversión, la depreciación, y la utilización del capital también bajo una forma general como trayectorias temporales parametrizadas. Esto es,

$$\hat{i} = i(\hat{k}(t, \mathbf{a}, \beta, n), \hat{\lambda}(t, \mathbf{a}, \beta, n)) = i(t, \mathbf{a}, \beta, n), \quad \hat{\delta} = \delta(\hat{k}(t, \mathbf{a}, \beta, n), \hat{\lambda}(t, \mathbf{a}, \beta, n)) = \delta(t, \mathbf{a}, \beta, n) \quad \text{y}$$

$$\hat{u} = u(\hat{k}(t, \mathbf{a}, \beta, n), \hat{\lambda}(t, \mathbf{a}, \beta, n)) = u(t, \mathbf{a}, \beta, n).$$

En estado estacionario tenemos que $\dot{k} = \dot{\lambda} = \dot{\eta} = 0$. En el presente modelo, con crecimiento de la población a una tasa constante n y sin progreso técnico exógeno, las variables k , y y c definidas en términos *per capita* permanecen constantes en el equilibrio de estado estacionario. A su vez, las variables K , Y y C definidas en niveles crecen a la tasa estacionaria constante n , la misma a la que crece la población. Sustituyendo en el anterior sistema dinámico encontramos los valores de equilibrio de estado estacionario: $k^*(\mathbf{a}, \beta, n)$ y $\lambda^*(\mathbf{a}, \beta, n)$, obtenidos como solución al siguiente sistema de ecuaciones estáticas:

$$(37) \quad \Pi(k^*, \lambda^*, \mathbf{a}, n) = 0$$

$$(38) \quad \Gamma(k^*, \lambda^*, \mathbf{a}, \beta) = 0$$

¹¹ Una forma relativamente sencilla de introducir los elementos del vector de parámetros ' \mathbf{a} ' consiste en reescribir la función de producción como $y = a_1 \cdot f(k \cdot u)$, la función de utilidad como $U(c, a_2)$, la función de costes de ajuste como $\phi(i, a_3)$, y la función de coste medio de mantenimiento como $m(\delta, u, a_4)$.

Al sustituir estos valores en la ecuación (22') obtenemos una expresión para los valores de estado estacionario del consumo *per capita*, en la cual aparecen de manera explícita los valores de estado estacionario de las variables de control.

$$(39) \quad c^* = f(k^* \cdot u^*) - [i^* + \phi(i^*) + m(\delta^*, u^*)] \cdot k^*$$

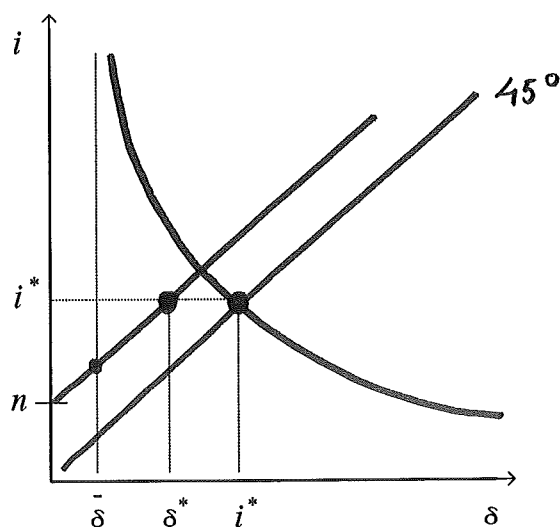
La ecuación (37) implica que, en el estado estacionario, tenemos:

$$(40) \quad i^* = n + \delta^*$$

El valor estacionario de la tasa de inversión es igual a la suma de los valores correspondientes a la tasa de crecimiento de la población y a la tasa de depreciación que se experimenta en el estado estacionario. Esta relación nos indica que no es posible conocer dicho valor sin el conocimiento previo o simultáneo del valor de la tasa de depreciación, el cual se determina conjuntamente con el valor de estado estacionario de la tasa de utilización del capital. Así pues, a diferencia de lo que ocurre en otros modelos más simples donde la depreciación se determina exógenamente a una tasa constante $\bar{\delta}$ y donde el capital se utiliza a plena capacidad, en éste resulta imprescindible resolver conjunta y simultáneamente todas las ecuaciones del modelo para conocer los valores de estado estacionario tanto de las variables de estado como de las de control. Esta propiedad del modelo se ilustra en el gráfico 7 que presentamos a continuación.

Gráfico 7.

El estado estacionario de las variables de control.



Por otra parte, de la ecuación (38) deducimos que en el estado estacionario, después de las correspondientes sustituciones, se cumple la siguiente relación:

$$(41) \quad f'(k^* \cdot u^*) = \frac{1}{u^*} \cdot [\delta^* + \beta + \phi(\delta^*+n) + m(\delta^*, u^*) + (\beta-n) \cdot \phi'(\delta^*+n)]$$

Esta expresión nos da el valor de estado estacionario del capital *per capita*, y constituye una versión modificada de las conocidas *modified golden rules*, que denominaremos "*delta modified golden rule*" para diferenciarla de las demás¹². Las principales diferencias de esta especificación con respecto a las versiones precedentes son la presencia de la tasa de utilización del capital, la figura de los costes de mantenimiento y, en especial, la tasa de depreciación endógena.

Podemos también calcular la correspondiente *golden rule* de este modelo con depreciación endógena y costes de mantenimiento a partir de la ecuación (39) diferenciando con respecto a k^* . El resultado que obtenemos es una "*delta golden rule*" que podemos escribir de la siguiente manera:

$$(42) \quad f'(k_{DGR}^* \cdot u^*) = \frac{1}{u^*} \cdot [\delta^* + n + \phi(\delta^*+n) + m(\delta^*, u^*)]$$

A partir de los resultados de las ecuaciones (41) y (42), dada la caracterización de las funciones de costes de ajuste y de mantenimiento, y dado que $\beta > n$ y $\delta^*+n > 0$, obtenemos que $f'(k^* \cdot u^*) > f'(k_{DGR}^* \cdot u^*)$. Así pues, dada la caracterización de la función de producción, el comportamiento optimizador del planificador central en nuestro modelo lleva al resultado siguiente:

$$(43) \quad k^* < k_{DGR}^*$$

Este resultado nos permite identificar la situación de estado estacionario como una situación dinámicamente eficiente. La economía no ahorra lo suficiente como

¹²La primera formulación de la *modified golden rule* que consideramos es la correspondiente al modelo Ramsey-Cass-Koopmans, y se recoge más abajo en la ecuación (41'). La segunda es la del modelo Abel-Blanchard, en el cual se especifica una versión modificada de la anterior que por comodidad denominaremos "*special modified golden rule*". Esta se recoge más abajo en la ecuación (41'').

para alcanzar el stock de capital correspondiente a la *delta golden rule*¹³, pero ello no constituye ningún problema desde el punto de vista del bienestar puesto que dicho valor se ha obtenido como solución centralizada al problema de maximización de la utilidad y, por tanto, nos ofrece un resultado Pareto óptimo.

El anterior resultado es relativamente estándar en la literatura sobre crecimiento óptimo. Sin embargo, otros resultados no tan evidentes parecen desprenderse de lo anterior si comparamos con los que se obtienen en los modelos de crecimiento óptimo que hemos venido denominando Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans y Modelo de Abel-Blanchard. Los resultados correspondientes a la solución centralizada en cada uno de estos modelos las podemos escribir, respectivamente, como sigue:

$$(41') \quad f'(k_{RCK}^*) = \bar{\delta} + \beta$$

$$(41'') \quad f'(k_{AB}^*) = \bar{\delta} + \beta + \phi(\bar{\delta}+n) + (\beta-n) \cdot \phi'(\bar{\delta}+n)$$

Al comparar k_{RCK}^* y k_{AB}^* con el k_{DGR}^* correspondiente a la *delta golden rule*¹⁴, nos encontramos con que aún cuando $\beta > n$, el hecho de que $\delta^* > \bar{\delta}$ y que $\phi(\delta^*+n) > 0$ y $m(\delta^*, u^*) > 0$ puede provocar un resultado tan paradigmático como el siguiente:

¹³ En el modelo estándar de crecimiento óptimo a la Ramsey-Cass-Koopmans la *golden rule*, equivalente a la que se obtiene en el modelo Solow-Swan con tasa de ahorro exógena y constante, se puede escribir como sigue:

$$(42') \quad f'(k_{GR}^*) = \bar{\delta} + n$$

En cambio, en el modelo Abel-Blanchard con costes de ajuste asociados a la inversión bruta se puede derivar una *golden rule* particular que denominamos "*special golden rule*", y que tras adaptar a nuestra nomenclatura podemos escribir como sigue:

$$(42'') \quad f'(k_{SGR}^*) = \bar{\delta} + n + \phi(\bar{\delta}+n).$$

¹⁴ Para facilitar la comparación nos abstraemos de la infrautilización del capital y consideramos el valor k_{DGR}^* obtenido de la ecuación (42) cuando suponemos $u^*=1$. Es decir, el valor que satisface la ecuación:

$$f'(k_{DGR}^*) = \delta^* + n + \phi(\delta^*+n) + m(\delta^*, 1)$$

En cualquier caso, esta simplificación no resulta determinante en relación a los resultados que se comentan en el texto principal.

$$(44) \quad k^* < k_{DGR}^* < k_{AB}^* < k_{RCK}^*$$

Este resultado es tanto más probable cuanto más pequeña sea la diferencia entre β y n . Con ello se pone de relieve que una subóptima política de depreciación del capital productivo, basada en la adjudicación de costes nulos al mantenimiento del capital deteriorado, puede tener consecuencias graves para la economía. Esta puede verse arrojada, aunque no necesariamente, a situaciones dominadas por un exceso de capital instalado¹⁵. En el marco de una economía cerrada como la que estamos considerando, esto sólo se puede dar sobre una trayectoria caracterizada por el exceso de ahorro y el bajo consumo. Por consiguiente, a lo largo de trayectorias dinámicamente ineficientes.

5. Análisis dinámico de las trayectorias óptimas

Consideremos ahora el anterior sistema dinámico hamiltoniano de las ecuaciones (35) y (36), que describe el comportamiento global de nuestro sistema económico, especificando las correspondientes funciones sin parametrizar:

$$(35') \quad \dot{k} = \Pi(k, \lambda)$$

$$(36') \quad \dot{\lambda} = \Gamma(k, \lambda)$$

Para cada una de las funciones anteriores podemos calcular fácilmente las correspondientes derivadas parciales respecto al par (k, λ) , obteniendo los siguientes resultados¹⁶:

¹⁵ Si no se contabilizan los costes de mantenimiento, entonces puede parecer óptimo realizar un mantenimiento máximo del capital deteriorado, dejando la depreciación en un nivel mínimo asociado a la tasa $\bar{\delta}$ correspondiente al inevitable deterioro físico.

¹⁶ Las expresiones (45)-(48) representan, una vez evaluadas en el correspondiente estado estacionario, los elementos de la matriz jacobiana resultante de la linealización del sistema dinámico (35)-(36).

$$(45) \quad \frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial k} = (i - \delta - n) + k \cdot \left[\frac{\partial i}{\partial k} - \frac{\partial \delta}{\partial k} \right] = (i - \delta - n) + \frac{k \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|}$$

$$(46) \quad \frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial \lambda} = k \cdot \left[\frac{\partial i}{\partial \lambda} - \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \right] = k \cdot \left[\frac{1}{\phi''} - \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \right] > 0$$

$$(47) \quad \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k} = \frac{\partial i}{\partial k} + \phi' \cdot \frac{\partial i}{\partial k} + m_1 \cdot \frac{\partial \delta}{\partial k} + m_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial k} - f'' \cdot u^2 - f'' \cdot u \cdot k \cdot \frac{\partial u}{\partial k} - f' \cdot \frac{\partial u}{\partial k} \\ + \lambda \cdot \left[\frac{\partial \delta}{\partial k} - \frac{\partial i}{\partial k} - \frac{\partial (\dot{\eta}/\eta)}{\partial k} \right] = -f'' \cdot u^2 \cdot \left[1 + k \cdot \frac{m_{11} \cdot f''}{|A|} \right] - \lambda \cdot \frac{\partial (\dot{\eta}/\eta)}{\partial k}$$

$$(48) \quad \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial i}{\partial \lambda} + \phi' \cdot \frac{\partial i}{\partial \lambda} + m_1 \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} + m_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} - f'' \cdot u \cdot k \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} - f' \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} + [\delta - i + \beta - (\dot{\eta}/\eta)] \\ + \lambda \cdot \left[\frac{\partial \delta}{\partial \lambda} - \frac{\partial i}{\partial \lambda} - \frac{\partial (\dot{\eta}/\eta)}{\partial \lambda} \right] = -f'' \cdot u \cdot k \cdot \frac{m_{21}}{|A|} + [\delta - i + \beta - (\dot{\eta}/\eta) - \lambda \cdot \frac{\partial (\dot{\eta}/\eta)}{\partial \lambda}]$$

A partir de estos resultados podemos tratar de caracterizar las correspondientes líneas de fase en el espacio (k, λ) . En primer lugar tenemos todos aquellos puntos en los cuales se cumple $\dot{k} = 0$. Los coeficientes recogidos en las ecuaciones (45) y (46) permiten calcular la pendiente de la línea de fase y determinan la dinámica de la variable k fuera de los puntos estacionarios. Los signos de estos coeficientes son invariantes y sus valores son los siguientes:

$$(45') \quad \left. \frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = \frac{k \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|} > 0$$

$$(46') \quad \left. \frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\dot{k}=0} = k \cdot \left[\frac{1}{\phi''} - \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \right] > 0$$

La pendiente de esta línea de fase es negativa en todo su trazado dado que:

$$(49) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{k=0} = - \frac{\frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = \frac{\phi'' \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{\phi'' \cdot f'' \cdot k - \phi'' \cdot m_{22} - m_{11} \cdot m_{22} + m_{12} \cdot m_{21} + m_{11} \cdot f'' \cdot k} < 0$$

Además, dada la anterior expresión, se demuestra fácilmente que la línea de fase es estrictamente convexa, $\partial^2 \lambda / \partial k^2 > 0$. Por otra parte, dados los signos de las ecuaciones (45') y (46'), sabemos que por encima y a la derecha de los puntos donde k es estacionario se observa $\dot{k} > 0$, mientras que por debajo y a la izquierda de dichos puntos correspondientes a la propia línea de fase se observa el movimiento contrario $\dot{k} < 0$.

En segundo lugar, para todos aquellos puntos del espacio (k, λ) donde se cumple la condición de estacionariedad $\dot{\lambda} = \dot{\eta} = 0$, los coeficientes expresados en las ecuaciones (47) y (48) permiten calcular la pendiente de la línea de fase y determinan la dinámica de la variable λ fuera de los puntos estacionarios.

$$(47') \quad \left. \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0} = -f'' \cdot u^2 \cdot \left[1 - \frac{-k \cdot m_{11} \cdot f''}{-k \cdot m_{11} \cdot f'' + (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21})} \right] > 0$$

$$(48') \quad \left. \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\dot{\lambda}=0} = \left(\frac{-f'' \cdot u \cdot k \cdot m_{21}}{|A|} \right) + (\beta + \delta - i) > 0$$

El signo del segundo coeficiente no es invariante a lo largo de todo el espacio (k, λ) . Por tanto, la pendiente de la línea de fase tampoco está definida independientemente del área donde nos encontremos. En concreto, podemos especificar su valor de la siguiente manera:

$$(50) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0} = - \frac{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^2}{(\beta + \delta - i) \cdot |A| - f'' \cdot u \cdot m_{21} \cdot k} > 0$$

Así, por ejemplo, la ecuación (48') nos dará un valor inequívocamente positivo sólo para valores pequeños de λ , mientras que para valores elevados de λ dicho coeficiente será negativo. Dado el signo invariante de la expresión (47'), la pendiente de la línea de fase puede presentarse con signo negativo para valores

pequeños de λ , mientras que para valores elevados de λ se presentará con signo positivo. Esto es así porque de acuerdo con las condiciones de primer orden correspondientes a las variables de control tasa de inversión y tasa de depreciación, dadas en las ecuaciones (26') y (27'), los valores elevados de λ se asocian con valores pequeños de la tasa de depreciación δ y con valores elevados de la tasa de inversión bruta i . En consecuencia, el término $(\beta + \delta - i)$ presenta un signo variable que depende del valor de λ correspondiente a las coordenadas del punto donde localicemos el análisis.

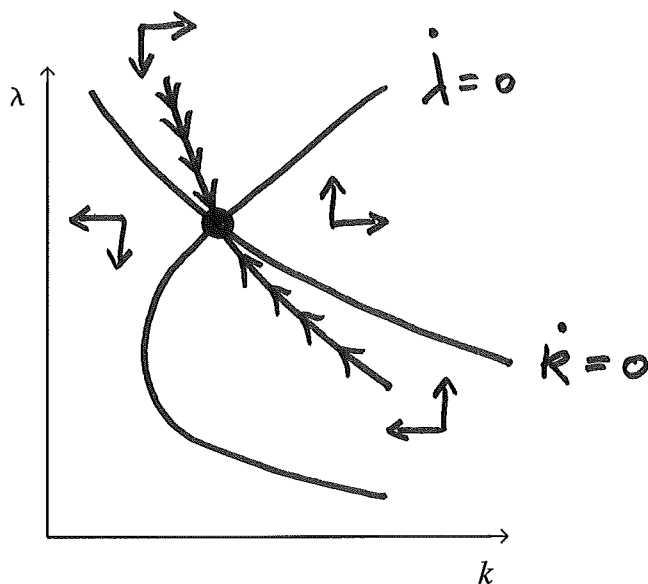
Dada la segmentación por tramos de la pendiente de la línea de fase correspondiente a los puntos donde $\dot{\lambda} = 0$, la dinámica de la variable λ fuera de sus puntos estacionarios será la siguiente: En el tramo con pendiente negativa observaremos que $\dot{\lambda} < 0$ por debajo y a la izquierda de la línea de fase, mientras que por arriba y a la derecha se observará $\dot{\lambda} > 0$. En el tramo con pendiente positiva, en cambio, tenemos que $\dot{\lambda} > 0$ en todos los puntos situados por debajo y a la derecha de la línea de fase, y $\dot{\lambda} < 0$ en aquellos situados por encima y a la izquierda.

De todos los puntos del espacio (k, λ) nos interesan especialmente aquellos que representan situaciones de estado estacionario. Además, dado el enfoque cualitativo que hemos adoptado en esta parte del trabajo, resulta sumamente importante establecer el signo de la pendiente de las líneas de fase en dichos puntos singulares. Para ello sustituimos las condiciones de estacionariedad en las ecuaciones (49) y (50) y nos fijamos en el signo de las correspondientes derivadas parciales. En lo relativo a la ecuación (49) los resultados no varían respecto a lo que teníamos previamente puesto que el signo era invariante en todo el espacio, incluidos los puntos estacionarios. Con respecto a la ecuación (50), la indeterminación de la pendiente de la línea de fase correspondiente a los puntos donde $\dot{\lambda} = 0$ perdura en el entorno de los equilibrios de estado estacionario. En dicha zona del espacio (k, λ) se da simultáneamente $\dot{k} = 0$ y $\dot{\lambda} = 0$, por lo que la anterior expresión (50) se simplifica de la siguiente manera:

$$(50') \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0, \dot{k}=0} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^{*2}}{(\beta - n) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} - m_{11} \cdot f'' \cdot k^*) - f'' \cdot u^* \cdot m_{21} \cdot k^*} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

En conjunto, toda la información precedente relativa al sistema dinámico constituido por las ecuaciones (35') y (36') se puede representar en términos gráficos en el diagrama de fase. En dicho gráfico se representan las dos líneas de fase así como las flechas que indican el movimiento de las variables k y λ fuera de los puntos estacionarios. Dada la falta de definición con la que nos hemos encontrado al considerar los signos de las ecuaciones (50) y (50'), cuya ambigüedad se traslada a la indeterminación del número de equilibrios aislados existentes en el espacio (k, λ) y a su respectiva caracterización en términos de estabilidad dinámica, presentamos a continuación en los gráficos 8, 9 y 10 tres situaciones posibles caracterizadas por la existencia de un único equilibrio de estado estacionario y por la existencia de múltiples estados estacionarios.

Gráfico 8.
El diagrama de fase (I).



Una manera de obtener explícitamente una caracterización completa del sistema dinámico no lineal de las ecuaciones (35') y (36') sería por medio de la aproximación consistente en linealizar en torno al/los estado/s estacionario/s. No obstante, dados los resultados cuantitativos y cualitativos que hemos ido presentando a lo largo de este apartado, disponemos de información suficiente para identificar el equilibrio único que hemos supuesto en el gráfico 8 como un

Gráfico 9.

El diagrama de fase (II): los equilibrios múltiples.

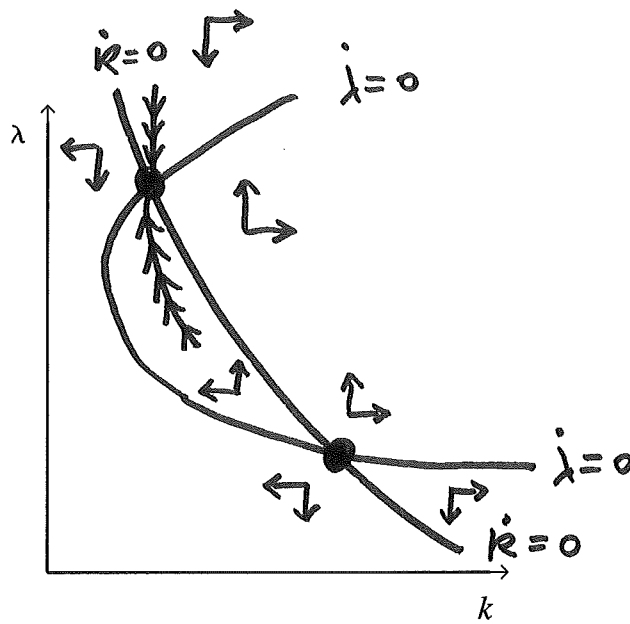
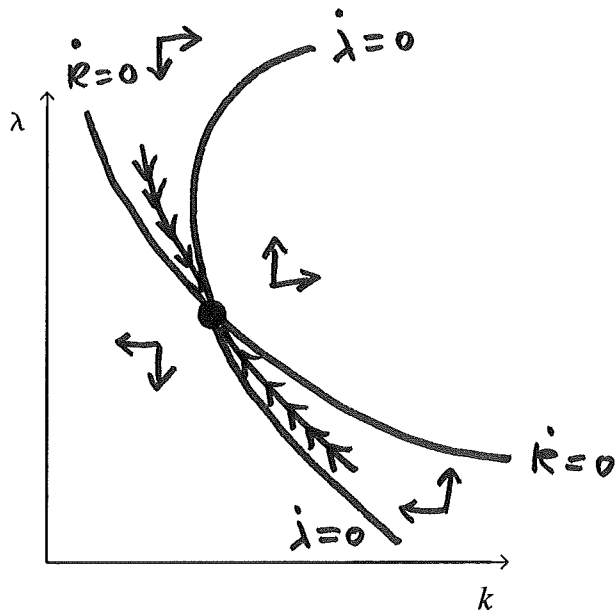


Gráfico 10.

El diagrama de fase (III).



equilibrio del tipo punto fijo con propiedades de punto de silla¹⁷. El sistema presenta, en este caso, inestabilidad del tipo senda de silla, convergiendo hacia el equilibrio a lo largo de las dos únicas trayectorias posibles: una desde el noroeste con un aumento continuado de k acompañado de la disminución de λ , y otra desde el sureste con variaciones de k y λ en sentido contrario. Entre las infinitas trayectorias que satisfacen las ecuaciones (35') y (36') las únicas que cumplen la condición de transversalidad de la ecuación (31) junto con la condición inicial relativa a la variable k , son las trayectorias óptimas. En el caso de un equilibrio de punto de silla, las ramas estables del mismo satisfacen las anteriores condiciones de optimalidad.

¹⁷ A efectos de caracterizar localmente el sistema dinámico linealizado en el entorno de un estado estacionario, podemos dirigir nuestra atención hacia los autovalores de la ecuación característica. En primer lugar, la naturaleza hamiltoniana del sistema originado en un problema estándar de optimización dinámica establece que los autovalores se agrupan por parejas, cuando son reales, o por cuádruplas cuando son complejos [Kurz (1968)]. En segundo lugar la dimensión ($2n$, siendo en nuestro caso $n=1$ el número de variables de estado) y el descuento ($\rho=\beta-n>0$) establecen una serie de limitaciones respecto a las posibles configuraciones dinámicas que nos podemos encontrar. En tercer lugar, la estricta concavidad de la función hamiltoniana con respecto a la variable de estado y la estricta convexidad con respecto a la variable de coestado determinan el signo de los coeficientes de la matriz jacobiana que se encuentran fuera de la diagonal principal, mientras que los que se encuentran en la diagonal principal aparecen relacionados entre sí en términos de oposición y transposición, modificada ésta sólo por la presencia del factor de descuento en uno de los coeficientes.

Con todo lo anterior podemos concluir que nuestra ecuación característica ofrece dos autovalores reales, γ_1 y γ_2 , junto con la restricción $\gamma_2=-\gamma_1+\rho$. Además, para todo estado estacionario estructuralmente estable ($\gamma_i \neq 0 \forall i=\{1,2\}$), la dinámica en torno al mismo solamente puede responder a uno de los dos patrones siguientes: dualidad estabilidad/inestabilidad local del tipo senda de silla, y completa inestabilidad local. En el primer caso un autovalor negativo junto a otro positivo nos dan un determinante de la matriz jacobiana negativo. Este resultado es el más probable puesto que ocurre siempre que no existe descuento, cuando existiendo descuento positivo el coeficiente de la diagonal principal de la matriz jacobiana que no va afectado por la tasa de descuento (recogido en la expresión (45') en el texto) tiene signo negativo, y también cuando éste último coeficiente se anula. En el segundo caso un autovalor positivo deberá aparecer asociado a otro positivo respetando la restricción entre autovalores anteriormente apuntada. Con ello se generarán una traza y un determinante de la matriz jacobiana también positivos. Esta situación exige como condición necesaria pero no suficiente que el coeficiente de la diagonal principal de la matriz jacobiana que no va afectada por la tasa de descuento (véase ecuación (45')) tenga signo positivo. El conjunto de las tres situaciones representadas en los gráficos 8, 9 y 10 constituyen un claro ejemplo tanto de la necesidad como de la insuficiencia de la condición anterior correspondiente al segundo caso. Los gráficos 11 y 12 representan las situaciones descritas en el primer caso.

El anterior es un caso en que la expresión de la ecuación (50') tiene signo positivo y, en su entorno, la expresión de la ecuación (48') tiene signo negativo. En el caso más complejo de equilibrios múltiples como el representado en el gráfico 9, nos encontramos con que uno de los estados estacionarios presenta la propiedad de punto de silla mientras que el otro se presenta como localmente inestable. Dada la expresión (50') y la presuposición de un equilibrio donde dicha expresión es positiva, el otro estado estacionario se caracteriza porque en él dicha expresión tiene signo negativo, aunque de menor valor absoluto que el término de la expresión (49). Este segundo estado estacionario arroja un valor de λ menor y un mayor valor de k . La inestabilidad que lo caracteriza la podemos derivar del hecho de que, en su entorno, la expresión (48') tiene signo positivo. Ninguna de las trayectorias que pasan cerca de este segundo estado estacionario, exceptuando la que se sitúa sobre el propio punto de equilibrio, satisface la condición de transversalidad, por lo que los valores de las variables no están acotados.

La tercera posibilidad es la recogida en el gráfico 10 con un único equilibrio de punto fijo. En este caso la expresión de la ecuación (50') tiene signo negativo y, en el entorno del estado estacionario, la expresión de la ecuación (48') presenta un signo positivo. A diferencia de lo que ocurría en el caso del gráfico 9, ahora el valor positivo de la expresión (48') no es indicativo de inestabilidad absoluta sino que contribuye a asegurar la propiedad de punto de silla. La razón es que, en el equilibrio, el valor negativo de la expresión (50') representa un mayor valor absoluto que el valor negativo de la expresión (49). El punto de silla que aquí se obtiene se caracteriza también porque las sendas convergentes se orientan en dirección noroeste-sureste.

En los tres casos analizados, los equilibrios de estado estacionario relevantes presentan la propiedad del punto de silla con sólo dos trayectorias óptimas que se corresponden con las únicas ramas estables o sendas convergentes hacia el equilibrio, las cuales satisfacen la condición de transversalidad para unas condiciones iniciales cualesquiera. En los tres casos la convergencia se establece en dirección noroeste-sureste, pero la posición y la pendiente de las trayectorias convergentes a lo largo del diagrama de fase dependen tanto de los valores de los parámetros generales como de la forma particular que adopten las distintas funciones del problema. En general, si el valor inicial de k es menor que el de equilibrio, a lo largo de la senda de convergencia dicho valor aumentará mientras que el valor de λ , inicialmente superior al de equilibrio, disminuirá.

Las implicaciones dinámicas transicionales que de estos movimientos se derivan para las variables tasa de inversión, tasa de depreciación y tasa de utilización del capital las podemos deducir de nuestros cálculos previos en las ecuaciones (32) y (32'). En concreto, a medida que k aumenta encontramos que i disminuye debido al descenso que experimenta la variable λ , mientras que δ y u presentan un comportamiento ambiguo. Ante la disminución de λ la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital tienden a aumentar; sin embargo, los aumentos de k provocan disminuciones en estas variables de tal modo que el efecto neto es incierto. Este efecto neto depende, en cada caso, de la importancia relativa de las variaciones de k y λ , las cuales dependen de la forma que adopte la trayectoria convergente en esta zona del diagrama de fase. Las otras dos variables relevantes en nuestro modelo son la producción *per capita* y el consumo *per capita*. La primera se determina de acuerdo con la función $y=f(k \cdot u)$ por lo que, a lo largo de la senda de convergencia, el incremento de k provoca un efecto directo positivo sobre la producción tan sólo parcialmente compensado por un efecto indirecto negativo asociado a la reducción que experimenta la tasa de utilización u . Ello es debido a que de acuerdo con la ecuación (34a) tenemos que $\partial y/\partial k > 0$. Además, la disminución de λ a lo largo de dicha senda óptima tiene por efecto incrementar la tasa de utilización y, con ella, la producción. Esto se debe a que de acuerdo con la ecuación (34b) observamos que $\partial y/\partial \lambda < 0$. Estos dos resultados conjuntamente nos permiten anticipar un movimiento ascendente de la producción *per capita* a lo largo de la rama descendente de la trayectoria que converge al equilibrio. Por lo que respecta al consumo *per capita*, dada la ecuación (22') y los resultados expresados en las ecuaciones (33a) y (33b), no es posible anticipar de una manera inequívoca y concluyente qué tipo de evolución experimentará dicha variable a lo largo de la senda convergente hacia el equilibrio estacionario. Sin embargo, dada la combinación de un efecto positivo asociado a la disminución de λ con el efecto ambiguo que aparece asociado al incremento de k , es lógico esperar que a lo largo de la senda convergente el consumo *per capita* aumente.

En el contexto de la discusión precedente, ilustrada con los correspondientes diagramas de fase, podemos localizar el origen de la ambigüedad que rodea a algunos de los resultados obtenidos¹⁸ en el signo de uno de los términos que aparece en las expresiones (49) y (50). Nos referimos al término m_{12} , o su equivalente m_{21} , que

¹⁸ Nos referimos a aquellos resultados concernientes a las pendientes de las líneas de fase, al número de estados estacionarios y sus propiedades de estabilidad dinámica, así como los que afectan al tipo de comportamiento dinámico transicional de las variables de control.

hemos supuesto negativo. Este es uno de los elementos que expresan los supuestos adoptados en relación a la función de costes de mantenimiento del capital y cuya modificación podría cambiar significativamente la caracterización de nuestro sistema dinámico. Este es, además, uno de los supuestos que cuenta con menor soporte empírico, hasta el momento. Así pues, en lo que sigue volveremos sobre nuestro sistema dinámico de la mano de dos hipótesis alternativas en relación a la segunda derivada cruzada de la función de coste medio de mantenimiento del capital $m(\delta, u)$. En primer lugar consideraremos el caso en que $m_{12}=m_{21}=0$, y después el caso en que $m_{12}=m_{21}>0$. En cada uno de ellos analizaremos las implicaciones para la determinación de las situaciones de equilibrio estacionario así como su caracterización dinámica, tratando de anticipar la evolución de las variables relevantes a lo largo de las trayectorias de equilibrio.

En el caso en que la segunda derivada cruzada de la función $m(\delta, u)$ es cero, el coeficiente correspondiente a la ecuación (45') se anula mientras que el de la ecuación (46') se mantiene definido positivo. Consiguientemente, la línea de fase correspondiente a todos los puntos donde $\dot{k} = 0$ tiene pendiente nula y se representa por una línea horizontal. Esto es:

$$(51) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = - \frac{\frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = 0$$

Además, en todos los puntos situados por encima de la línea de fase se observa $\dot{k} > 0$, mientras que en los situados por debajo ocurre que $\dot{k} < 0$. Por otra parte, el coeficiente correspondiente a la ecuación (47') mantiene su valor positivo mientras que el coeficiente correspondiente a la ecuación (48') aparece indeterminado dependiendo de las coordenadas del punto donde se localice el análisis dentro del diagrama de fase. La indeterminación del signo del término $(\beta + \delta - i)$ tiene implicaciones sobre la pendiente de la línea de fase correspondiente a los puntos donde $\dot{\lambda} = 0$, la cual se nos representa también indeterminada:

$$(52) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0} = - \frac{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = \frac{m_{11} \cdot m_{22} \cdot f'' \cdot u^2}{(\beta + \delta - i) \cdot |A|} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

Los resultados que obtenemos son semejantes a los anteriormente detallados cuando analizábamos la ecuación (50). La representación de la línea de fase aparece de nuevo con pendiente variable y la dinámica fuera de los puntos estacionarios reproduce los movimientos allí apuntados. Sin embargo, si evaluamos esta pendiente en los puntos de equilibrio estacionario donde $\beta + \delta^* - i^* = \beta - n > 0$, entonces comprobamos que tiene signo invariablemente negativo.

$$(52') \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0, \dot{k}=0} = \frac{m_{11} \cdot m_{22} \cdot f'' \cdot u^{*2}}{(\beta - n) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{11} \cdot f'' \cdot k^*)} < 0$$

El conjunto de los resultados anteriores relativos a las líneas de fase bajo el supuesto alternativo $m_{12} = m_{21} = 0$ los hemos representado en el gráfico 11. El equilibrio único que se obtiene en este caso es un equilibrio del tipo punto fijo con propiedades dinámicas de punto de silla. Las trayectorias convergentes son semejantes cualitativamente a las consideradas en el caso principal más arriba descrito. Si el valor inicial de k se encuentra por debajo del de equilibrio, a lo largo de la senda de convergencia dicho valor aumentará mientras que el valor de λ , situado inicialmente por arriba del de equilibrio, disminuirá.

La dinámica transicional de las variables de control asociada a este supuesto alternativo sobre la función de coste medio de mantenimiento, aparece ahora más nítidamente definida que en el caso anterior puesto que nos encontramos con los siguientes resultados simplificadores: $\partial \delta / \partial k = 0$, $\partial u / \partial \lambda = 0$, $\partial y / \partial \lambda = 0$. A medida que k aumenta y λ disminuye, la tasa de inversión i disminuye, la tasa de depreciación δ aumenta, la tasa de utilización u disminuye, y tanto la producción *per capita* como el consumo *per capita* aumentan.

Finalmente, vamos a considerar el caso en que $m_{12} = m_{21} > 0$. En este caso el coeficiente correspondiente a la ecuación (45') resulta ser negativo y, junto con el valor invariablemente positivo del coeficiente de la ecuación (46'), determina una pendiente positiva para la línea de fase correspondiente a los puntos donde $\dot{k} = 0$. Esto es:

$$(53) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = \frac{\phi'' \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{\phi'' \cdot f'' \cdot k - \phi'' \cdot m_{22} \cdot m_{11} \cdot m_{22} + m_{12} \cdot m_{21} + m_{11} \cdot f'' \cdot k} > 0$$

Además, dados los signos de las ecuaciones (45') y (46'), ocurre que en todos los puntos situados por encima y a la izquierda de la línea de fase $\dot{k} > 0$, mientras que por debajo y a la derecha se observa el movimiento contrario $\dot{k} < 0$. Por otra parte, en este último caso seguimos teniendo el coeficiente correspondiente a la ecuación (47') definido positivo junto con el coeficiente correspondiente a la ecuación (48') que aparece todavía indeterminado dependiendo del signo del término $(\beta + \delta - i)$. Esta indeterminación se perpetúa en la pendiente de la línea de fase correspondiente a los puntos donde $\dot{\lambda} = 0$. Los resultados relativos a la pendiente de la línea de fase y a la dinámica de la variable λ fuera de los puntos correspondientes a dicha línea de fase son geoméricamente semejantes, aunque por motivos diferentes en cada caso, a los anteriormente detallados cuando analizábamos tanto la ecuación (50) como la (52). Ahora bien, si evaluamos esta pendiente en los puntos de equilibrio estacionario donde $\beta + \delta - i^* = \beta - n > 0$, se registra una pendiente inequívocamente negativa, tal y como se aprecia en las dos ecuaciones siguientes:

$$(54) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0} = - \frac{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^2}{(\beta + \delta - i) \cdot |A| - f'' \cdot u \cdot m_{21} \cdot k} > 0$$

$$(54') \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0, \dot{k}=0} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^{*2}}{(\beta - n) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} - m_{11} \cdot f'' \cdot k^*) - f'' \cdot u^* \cdot m_{21} \cdot k^*} < 0$$

Estos resultados correspondientes al tercer, y último, caso en el cual $m_{12} = m_{21} > 0$, se pueden observar en el gráfico 12. De nuevo se obtiene un equilibrio único del tipo punto fijo con propiedades dinámicas de punto de silla en el cual las trayectorias convergentes vuelven a ser semejantes cualitativamente a las consideradas en los dos casos anteriores. De nuevo nos encontramos que si el valor inicial de k se encuentra por debajo del de equilibrio, a lo largo de la senda de convergencia dicho valor aumentará mientras que el valor de λ , situado inicialmente por arriba del de equilibrio, disminuirá. En relación al comportamiento dinámico transicional de las variables de control correspondiente a este tercer supuesto sobre la función de coste medio de mantenimiento, nos encontramos con que el patrón seguido es, cualitativamente, el mismo que el obtenido bajo el supuesto extremo previamente analizado. A medida que k aumenta y λ disminuye, la tasa de inversión i disminuye, la tasa de depreciación δ aumenta y la tasa de utilización u disminuye.

Gráfico 11.

El diagrama de fase cuando $m_{12}=m_{21}=0$.

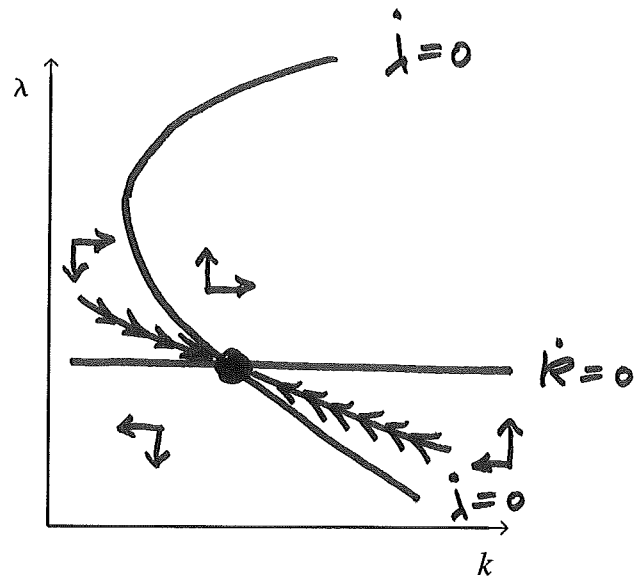
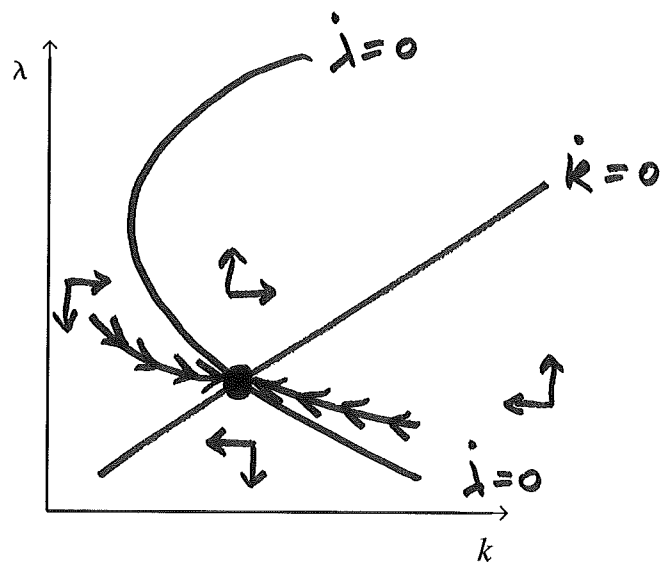


Gráfico 12.

El diagrama de fase cuando $m_{12}=m_{21}>0$.



Estas conclusiones se obtienen después de comprobar que los resultados: $\partial\delta/\partial k > 0$ y $\partial u/\partial\lambda > 0$, contribuyen a potenciar los efectos sobre δ y u obtenidos en el caso anterior cuando m_{12} se anulaba. No obstante, por lo que respecta a la variable producción *per capita* las cosas no aparecen tan nítidas como antes. Ahora, el nuevo resultado $\partial y/\partial\lambda > 0$ provoca un movimiento compensatorio sobre la producción, dejando el efecto neto indeterminado. Finalmente, el consumo *per capita* aumenta a lo largo de la senda de convergencia de una manera inequívoca.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos planteado un modelo de crecimiento óptimo con costes de ajuste asociados a la inversión bruta y costes de mantenimiento del capital. Estos costes de mantenimiento se hacen patentes cuando se intenta actuar sobre los bienes de capital deteriorados para evitar su depreciación. Se puede, por tanto, interpretar como una generalización del modelo de Abel-Blanchard, el cual ya fue propuesto como una ampliación del modelo básico de crecimiento óptimo *à la* Ramsey-Cass-Koopmans.

En nuestro modelo la solución correspondiente a la economía centralizada se caracteriza porque en el equilibrio de estado estacionario todas las variables, tanto la de estado como las de control, se determinan simultáneamente. No existe posibilidad de ir resolviendo recursivamente el sistema de ecuaciones constitutivas del equilibrio económico a partir de una tasa de depreciación exógena y constante $\bar{\delta}$. Uno de los resultados más interesantes de este trabajo es que incluso en equilibrio a largo plazo la economía no utiliza plenamente el capital instalado. Existe, por tanto, una infrautilización óptima y eficiente del capital. Por otra parte, en el estado estacionario la tasa de depreciación óptima δ^* difiere de la tradicional tasa de depreciación exógena $\bar{\delta}$, por lo que la tasa de inversión ha de elegirse respetando la restricción $i^* = \delta^* + n$. En este modelo, además, se definen las tradicionales *golden rule* y *modified golden rule* de manera diferente a como se hace en los modelos establecidos, aún cuando la lógica aplicada para obtenerlas sea la misma, y las denominamos *delta golden rule* y *delta modified golden rule*, respectivamente, para diferenciarlas de las que se obtienen en esos modelos menos complejos. No obstante, los resultados obtenidos nos permiten caracterizar la situación de estado estacionario como una situación dinámicamente eficiente.

El equilibrio en este modelo es un punto de silla, por lo que el sistema presenta inestabilidad del tipo senda de silla, convergiendo hacia el equilibrio a lo largo de las dos únicas trayectorias óptimas que satisfacen la condición de transversalidad: una desde el noroeste con un aumento continuado de k acompañado de la disminución de λ , y otra desde el sureste con variaciones de k y λ en sentido contrario. En el corto plazo, a lo largo de la senda de convergencia relevante para un k inicial inferior al de equilibrio, el comportamiento dinámico transicional de las variables tasa de inversión, tasa de depreciación y tasa de utilización del capital es fácil de deducir. A medida que k aumenta encontramos que la tasa de inversión i disminuye debido al descenso que experimenta la variable λ . Por su parte, la tasa de depreciación δ aumenta y la tasa de utilización del capital u disminuye. Estos resultados ocurren cuando consideramos que m_{12} es nula o positiva; en cambio, bajo el supuesto de m_{12} negativa la tasa de depreciación y la tasa de utilización presentan un comportamiento ambiguo. Ante la disminución de λ la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital tienden a aumentar; sin embargo, los aumentos de k provocan disminuciones en estas variables de tal modo que el efecto neto es incierto. Este efecto neto depende, en cada caso, de la importancia relativa de las variaciones de k y λ , las cuales dependen de la forma que adopte la trayectoria convergente en esta zona del diagrama de fase. Por lo que respecta a la producción y el consumo *per capita*, en general, ambas aumentan a lo largo de la trayectoria convergente. Sin embargo, esta evolución se manifiesta de manera inequívoca sólo en el caso en que se supone $m_{12}=0$, mientras que la evolución del consumo es incierta bajo el supuesto $m_{12}<0$, y la de la producción lo es cuando $m_{12}>0$.

Referencias Bibliográficas

- Abel, A.B. and O.J. Blanchard (1983): "An Intertemporal Model of Saving and Investment", *Econometrica*, 51 (3), 675-692.
- Barro, R.J. and X. Sala-i-Martin (1995): *Economic Growth*, McGraw-Hill Inc., USA.
- Bischoff, C.W. and E.C. Kokkelenberg (1987): "Capacity Utilization and Depreciation-in-Use", *Applied Economics*, 19, 995-1007.
- Burnside, C. and M. Eichenbaum (1994): "Factor Hoarding and the Propagation of Business Cycle Shocks", *NBER Working Paper* num. 4675, NBER, Cambridge, USA.
- Chiang, A. (1992): *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill International Editions, Economics Series, New York, USA.
- Epstein, L. and M. Denny (1980): "Endogenous Capital Utilization in a Short-Run Production Model", *Journal of Econometrics*, 12, 189-207.
- Escribá-Pérez, F.J. and J.R. Ruiz-Tamarit (1996): "Maintenance Costs and Endogenous Depreciation", *Revista Española de Economía*, 13 (2), 261-277.
- Kurz, M. (1968): "The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes", *Review of Economic Studies*, 35, 155-174.
- Licandro, O. and L.A. Puch (1995): "Capital Utilization, Maintenance Costs and the Business Cycle", *Fedea*, Documento de Trabajo # 9516.
- Licandro, O., L.A. Puch y J.R. Ruiz-Tamarit (1996): "Utilización del Capital y Ciclo Económico Español", *Moneda y Crédito* (Segunda Epoca), 202, 241-278.
- Motahar, E. (1992): "Endogenous Capital Utilization and the q Theory of Investment", *Economics Letters*, 40, 71-75.
- Ruiz-Tamarit, J.R. (1995): "Dépréciation Endogène et Sous-Utilisation du Capital", *IRES Discussion Paper* 9526, Institut de Recherches Economiques et Sociales, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.

Seierstad, A. and K. Sydsaeter (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North Holland Publishing Co., Amsterdam.

Uzawa, H. (1964): "Optimal Growth in a Two Sector Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 31, 1-24.

Uzawa, H. (1968): "Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings", in: J. N. Wolfe ed., *Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*, The University of Edingburgh Press, 485-504.

DOCUMENTOS PUBLICADOS***

- WP-EC 95-01 "Margen Precio-Coste Marginal y Economías de Escala en la Industria Española: 1964-1989"
F.J. Goerlich, V. Orts. Abril 1995.
- WP-EC 95-02 "Temporal Links Between Price Indices of Stock Markets with Overlapping Business Hours"
A. Peiró, J. Quesada, E. Uriel. Abril 1995.
- WP-EC 95-03 "Competitive and Predatory Multi-Plant Location Decisions"
A. García Gallego, N. Georgantzis. Abril 1995.
- WP-EC 95-04 "Multiproduct Activity and Competition Policy: The Tetra Pack Case"
A. García Gallego, N. Georgantzis. Junio 1995.
- WP-EC 95-05 "Estudio Empírico de la Solvencia Empresarial en Comunidad Valenciana"
J.L. Gandía, J. López, R. Molina. Junio 1995.
- WP-EC 95-06 "El Método Generalizado de los Momentos"
A. Denia, I. Mauleón. Junio 1995.
- WP-EC 95-07 "Determinación de una Tipología de Hogares en el Marco de una Matriz de Contabilidad Social"
M.L. Moltó, S. Murgui, E. Uriel. Junio 1995.
- WP-EC 95-08 "Relaciones Rentabilidad-Riesgo en Futuros Sobre Deuda a Largo Plazo"
R.M. Ayela. Junio 1995.
- WP-EC 95-09 "Eficiencia, Cambio Productivo y Cambio Técnico en los Bancos y Cajas de Ahorros Españolas: Un Análisis Frontera no Paramétrico"
J.M. Pastor. Junio 1995.
- WP-EC 95-10 "Infrastructures and Productivity in the Spanish Regions"
M. Mas, J. Maudos, F. Pérez, E. Uriel. Octubre 1995.
- WP-EC 95-11 "Macroeconomic Performance of Sixteen Ibero-American Countries over the Period 1980-1991"
C.A. Knox Lowell, J.T. Pastor. Octubre 1995.
- WP-EC 95-12 "Determinantes de la Demanda de Educación en España"
P. Bencito, J. Ferri, M^a. Moltó, E. Uriel. Octubre 1995.
- WP-EC 95-13 "GMM Estimation of Count Panel Data Models with Fixed Effects and Predetermined Instruments"
J. García Montalvo. Noviembre 1995.
- WP-EC 95-14 "Prestación de Servicios Bancarios en las Cajas de Ahorros Españolas: Cajeros Automáticos *Versus* Oficinas"
J. Maudos, J.M. Pastor. Noviembre 1995.
- WP-EC 95-15 "Unemployment Determinants for Women in Spain"
N. Lázaro, M.L. Moltó, R. Sánchez. Noviembre 1995.
- WP-EC 95-16 "Indicadores de Capital Humano y Productividad"
L. Serrano Martínez. Noviembre 1995.
- WP-EC 95-17 "Strategic Consumer Location in Spatial Competition Models"
M.A. García Gallego, N. Georgantzis, V. Orts Rios. Noviembre 1995.
- WP-EC 95-18 "Efficiency Analysis in Banking Firms: An International Comparison"
J.M. Pastor, F. Pérez, J. Quesada. Noviembre 1995.
- WP-EC 95-19 "Análisis de Cointegración en la Estructura Temporal de los Tipos de Interés de la Deuda Pública"
P. Rico Belda. Diciembre 1995.

***Para obtener una lista de documentos de trabajo anteriores a 1995, por favor, póngase en contacto con el departamento de publicaciones del IVIE.

- WP-EC 95-20 "Transition Probabilities to Employment and Non-Participation"
P. Antolín Nicolás. Diciembre 1995.
- WP-EC 96-01 "Determinantes de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés de la Deuda Pública"
P. Rico. Febrero 1996.
- WP-EC 96-02 "Una Estimación Econométrica del Stock de Capital de la Economía Española"
A. Denia, A. Gallego, I. Mauleón. Febrero 1996.
- WP-EC 96-03 "La Propiedad de Simetría en los Rendimientos Financieros Diarios Españoles"
A. Peiró. Febrero 1996.
- WP-EC 96-04 "A Note about Effort, Wages, and Unemployment"
M. D. Alepuz, M. A. Diaz, R. Sánchez. Abril 1996.
- WP-EC 96-05 "Efectos Macroeconómicos de una Sustitución de un Impuesto Específico por IVA Bajo Competencia Imperfecta. Una Aproximación.
R. Torregrosa. Abril 1996.
- WP-EC 96-06 "Technical Progress in Spanish Banking: 1985-1994"
J. Maudos, J. M. Pastor, J. Quesada. Abril 1996.
- WP-EC 96-07 "Long-Run Groundwater Reserves Under Uncertainty"
S. Rubio, J. Castro. Abril 1996.
- WP-EC 96-08 "Dimensión Regional de la Innovación Tecnológica"
M. Gumbau. Abril 1996.
- WP-EC 96-09 "Growth and Population Aging: The Spanish Case"
J. García Montalvo, J. Quesada. Julio 1996.
- WP-EC 96-10 "Eficiencia Productiva Sectorial en las Regiones Españolas: Una Aproximación Frontera"
M. Gumbau, J. Maudos. Septiembre 1996.
- WP-EC 96-11 "Desajuste Educativo y Formación Laboral Especializada: Efectos Sobre los Rendimientos Salariales"
P. Beneito, J. Ferri, M.L. Moltó, E. Uriel. Septiembre 1996.
- WP-EC 96-12 "Market Structure and Performance in Spanish Banking Using a Direct Measure of Efficiency"
J. Maudos. Septiembre 1996.
- WP-EC 96-13 "Estudio de las Relaciones Entre el Contrato de Futuro sobre IBEX-35 y su Activo Subyacente"
F. J. Climent, A. Pardo. Octubre 1996.
- WP-EC 96-14 "Job Search: Intensity and Reservation Wage in the Spanish Labour Market"
J. M. Blanco, A. Picazo. Octubre 1996.
- WP-EC 96-15 "Target Setting: An Application to the Branch Network of Caja de Ahorros del Mediterraneo"
C.A. Knox Lovell, J. T. Pastor. Octubre 1996.
- WP-EC 96-16 "Financing a Nationalized Monopoly: Coase's Versus Hotelling-Lerner's Solution"
R. Torregrosa. Diciembre 1996.
- WP-EC 96-17 "Atracción de Centros Comerciales en el Contexto de la Elección Discreta Individual"
F. Más Ruiz. Diciembre 1996.
- WP-EC 96-18 "Valoración Crediticia de la Deuda de las Comunidades Autónomas Españolas: Una Aplicación del Análisis Discriminante"
J. Aurióles, A. Pajuelo, R. Velasco. Diciembre 1996.
- WP-EC 96-19 "Financiación de las PYMES en la Comunidad Valenciana: Estudio Empírico"
J. López, V. Riaño, M. Romero. Diciembre 1996.
- WP-EC 96-20 "Un modelo intertemporal de determinación de la balanza por cuenta corriente de la economía española"
M. Camarero, V. Esteve, C. Tamarit. Diciembre 1996.
- WP-EC 96-21 "Política de precios y reajustes en los márgenes de beneficio. El comportamiento de los exportadores españoles de automóviles"

J. Balaguer, V. Orts, E. Uriel. Diciembre 1996.

- WP-EC 97-01 "A recent exploratory insight on the profile of the Innovative entrepreneur: conclusions from a Cross-tabs analysis"
I. March, R. M. Yagüe. April 1997.
- WP-EC 97-02 "Optimal Growth and the Intertemporal Allocation of Recreation and Productive Land "
R. Goetz, S. Rubio. Abril 1997.
- WP-EC 97-03 "Ineficiencias en las Negociaciones entre Dos Agentes Completamente Informados"
V. Calabuig. Abril 1997.
- WP-EC 97-04 "Un Enfoque de Cartera para la Diversificación Regional"
E. Reig, A. Picazo. Junio 1997.
- WP-EC 97-05 "Shocks Agregados Vs. Shocks Sectoriales: Un Análisis Factorial"
F. Goerlich. Junio 1997.
- WP-EC 97-06 "Dynamic Factor Analytic Model Estimation Using DYNFAC - A Guide for Users-"
F. Goerlich. Junio 1997.
- WP-EC 97-07 "Gasto Público y Consumo Privado en España ¿Sustitutivos o Complementarios?"
M. Camarero, V. Esteve, C. Tamarit. Julio 1997.
- WP-EC 97-08 "Are Business Cycles Asymmetric? Some European Evidence"
A. Peiró. Julio 1997.
- WP-EC 97-09 "Análisis no paramétrico de eficiencia en presencia de outputs no deseables"
A. Picazo, E. Reig, Hernández. Julio 1997.
- WP-EC 97-10 "Continuities and Discontinuities in the Economic Growth of Spain. 1850-1936"
A. Cubel, J. Palafox. Octubre 1997.
- WP-EC 97-11 "Monetary Policy Transmission in the EMS: A VAR Approach"
J. García-Montalvo, E. Shioji. Octubre 1997.
- WP-EC 97-12 "Efficiency of European Banking Systems: A Correction by Environmental Variables"
J. Pastor, A. Lozano, J.M. Pastor. Octubre 1997.
- WP-EC 97-13 "Seasonal Unit Roots in Trade Variables"
C. Alexander, M. Cantavella. Octubre 1997.
- WP-EC 97-14 "El tamaño como determinante de la estrategia de las empresas españolas"
J.M. Pastor, M. Illueca. Octubre 1997.
- WP-EC 97-15 "Competencia imperfecta, multiplicador con presupuesto equilibrado e imposición distorsionante"
R. Torregrosa. Octubre 1997.
- WP-EC 97-16 "Strategic Investments and Multinational Firms under Oligopoly"
R. Moner, V. Orts, J.J. Sempere. Noviembre 1997.
- WP-EC 97-17 "The Stock of Physical Capital of the Spanish Economy 1900-1958"
A. Cubel, J. Palafox. Noviembre 1997.
- WP-EC 97-18 "Strategic Behavior and Efficiency in a Groundwater Pumping Differential Game"
S. Rubio. Noviembre 1997.
- WP-EC 97-19 "La Demanda de Vivienda en España"
M.C. Colom, M.C. Cruz. Noviembre 1997.
- WP-EC 97-20 "Convergencia en las Regiones Españolas: Cambio Técnico, Eficiencia y Productividad"
J. Maudos, J.M. Pastor, L. Serrano. Noviembre 1997.
- WP-EC 98-01 "Incidencia de los Tipos del Mercado Monetario Sobre los Precios de las Operaciones Bancarias"
M.T. Barreira, R. Ferrer, C. González. Febrero 1998.
- WP-EC 98-02 "Product Mix of the Spanish Banking Firms: Do Competition Clubs Exist?"
F. Pérez, E. Tortosa-Ausina. Febrero 1998.

- WP-EC 98-03 “Las Operaciones Fuera de Balance en el Sistema Bancario Español: Implicaciones para la Eficiencia”
J.F. Fernández de Guevara. Febrero 1998.
- WP-EC 98-04 “Capital Humano, Estructura Sectorial y Crecimiento en las Regiones Españolas”
L. Serrano. Marzo 1998.
- WP-EC 98-05 “Crecimiento Óptimo, Depreciación Endógena y Subutilización del Capital”
O. Licandro, L.A. Puch, J.R. Ruiz. Marzo 1998.
- WP-EC 98-06 “Capital Humano y Movilidad Espacial del Trabajo en la Economía Española”
L. Serrano. Marzo 1998.