UTILIDAD EXPANDIDA Y ALGUNAS MODALIDADES DE SEGURO*

Ramón J. Sirvent y Josefa Tomás**

WP-EC 92-15

* Agradecemos la ayuda y sugerencias de Carmen Herrero, directora del proyecto financiado por el Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas en el que se enmarca este trabajo, así como los comentarios de los evaluadores anónimos.

** Universidad de Alicante.

Editor: **Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.**
Primera Edición Diciembre 1992.
ISBN: 84-482-0040-3
Depósito Legal: V-4546-1992
Impreso por KEY, S.A., Valencia.
Cardenal Benlloch, 69, 46021-Valencia.
Impreso en España.

UTILIDAD EXPANDIDA Y ALGUNAS MODALIDADES DE SEGURO

Ramón J. Sirvent y Josefa Tomás

RESUMEN

Este trabajo pretende, mediante el análisis de algunas modalidades de seguro y de otras formas de protección frente al riesgo, poner de manifiesto que la consideración de la actitud frente al éxito/fracaso, modelizada a través de la utilidad expandida, puede dar respuesta satisfactoria a algunas de las dificultades que se constatan en la aplicación de la teoría clásica. La mayor proporción de agentes temperamentales sobre tibios sugerida por el modelo, se vería confirmada por la evidencia empírica.

ABSTRACT

In this paper we model choice under risk by means of a new version of Regret Theory, called here *Expanded Utility Theory*. We analyze some classical problems in the insurance literature by means of this approach by considering two basic types of attitudes towards success/failure. We show that some predictions of our model are consistent with the empirical evidence.

0.- INTRODUCCION

En la teoría tradicional para la elección en condiciones de riesgo, la "aversión al riesgo" de los agentes está vinculada a la concavidad de la utilidad básica sobre resultados monetarios ciertos. Es precisamente esta actitud ante el riesgo la causa explicativa de fenómenos como la diversificación entre activos, la toma de seguros, etc., decisiones que se entiende intentan disminuir el riesgo al que se enfrentan los agentes ante una decisión de resultados inciertos.

Paradójicamente, determinadas actuaciones de los individuos que, intuitivamente se corresponden con la idea de "disminuir el riesgo enfrentado", no resultan consistentes con la aplicación de la teoría clásica sobre agentes cuya utilidad monetaria básica es cóncava.

Una de tales observaciones se recoge en un experimento planteado por Kahneman y Tversky (1979) para una modalidad de seguro que denominan *probabilístico* para el cual, la hipótesis de concavidad es la responsable de que la prescripción de la Utilidad Esperada sea contraria a los hechos observados.

Otro resultado conocido es el que presentan Erlich y Becker (1972) en su análisis de las interacciones entre el mercado de seguros y otras formas de protección frente al riesgo, del que concluyen que el incentivo por la protección queda desvinculado, paradójicamente, de la aversión al riesgo.

En un trabajo anterior, Sirvent y Tomás (1992a), aplicábamos una versión de la Teoría del Arrepentimiento (Loomes y Sugden (1982)) que denominamos Utilidad Expandida al problema de la decisión de seguro pleno, explicando cómo por transferencias de arrepentimiento/regocijo, los agentes neutrales al riesgo pueden llegar a asegurarse. Esta idea viene recogida también en un trabajo de Shefrin y Statman (1990) que explica por qué los inversores delegan su responsabilidad en los corredores de bolsa.

Partiendo del experimento de Kahneman y Tversky, pretendemos comprobar en este trabajo que el modelo de la Utilidad Expandida predice comportamientos que se adecuan notablemente a las observaciones empíricamente realizadas, así como explorar el problema de otras formas de protección frente al riesgo. Introduciendo un índice que clasifica a los agentes en temperamentales y tibios frente al éxito/fracaso y los ordena según la intensidad de esta respuesta psicológica, concluimos que debe existir una mayor proporción de agentes temperamentales que de tibios en cualquier muestra uniforme de población, lo que proporcionaría resultados consistentes con el experimento de Kahneman y Tversky.

En la primera sección del trabajo, hacemos un breve resumen del modelo de la Utilidad Expandida e introducimos el *índice temperamental Tau* (Sirvent y Tomás (1992b), recogiendo exclusivamente algunas propiedades que serán utilizadas más tarde. En la sección 2, aplicamos nuestro modelo al problema del seguro probabilístico y conseguimos explicar por la vía de la actitud frente al éxito/fracaso (con independencia de la actitud frente al riesgo), las verificaciones experimentales. En la sección 3, aprovechando resultados ya obtenidos para la decisión de seguro, abordamos el problema de otras formas de protección en un intento de resolver algunas de las paradojas que plantea el tratamiento clásico. El trabajo se cierra con algunos comentarios finales.

1.- UTILIDAD EXPANDIDA

Consideraremos un individuo que valora parejas de acciones cada una de las cuales proporciona un resultado según el estado del mundo que se realice y que en su elección, expande o contrae las diferencias de utilidad básica que generan los resultados de las acciones enfrentadas.

Se podría interpretar que esta expansión o contracción de las diferencias de utilidad en cada estado del mundo es el resultado de la incorporación a la valoración de sentimientos como regocijo, arrepentimiento, frustación,...etc. que en unos casos expanden la utilidad y en otros la contraen.

Como punto de partida se considera un sistema finito y exhaustivo de estados del mundo $\{s_1, s_2, .. s_j, .. s_n\}$ cuyas correspondientes probabilidades $\{\pi_1, \pi_2, .. \pi_j, .. \pi_n\}$ supondremos conocidas y tales que $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$.

Supondremos resultados monetarios y que las preferencias de los agentes sobre los resultados ciertos son representables mediante una función de utilidad básica (ver Loomes y Sugden (1982)) continua y creciente $u:\Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ donde Θ es el conjunto de resultados. Así, a cada acción le asociamos el vector de las utilidades básicas sobre cada uno de los resultados en cada estado del mundo posible. Para los agentes neutrales frente al riesgo, tomaremos lineal esta utilidad básica.

El problema que enfrenta el agente decisor, es la elección entre parejas de acciones alternativas que denotaremos A_1 y A_2.

Se tendría la siguiente matriz:

Estados del mundo	s_1	s_2	...	s_j	...	s_n	
Probabilidades	π_1	π_2	...	π_j	...	π_n	$\sum_{j=1}^{n} \pi_j=1$
Acción A_1	u_{11}	u_{12}		u_{1j}		u_{1n}	
Acción A_2	u_{21}	u_{22}		u_{2j}		u_{2n}	

Donde $u_{ij} = u(x_{ij})$ es la utilidad que proporciona el resultado $x_{ij} \in \Theta$ de la acción A_i (i=1, 2) cuando se da el estado del mundo s_j.

Definición 1.- Llamamos utilidad expandida de la elección de A_1 y el rechazo de A_2 cuando se da el estado s_j a:

$$\in_{1j} = (u_{1j} - u_{2j})h(u_{1j}, u_{2j})$$

donde h(.,.) es una medida del arrepentimiento/regocijo.

Definición 2.- LLamamos utilidad expandida de la elección de A_2 y el rechazo de A_1 a:

$$\in_{2j} = (u_{2j} - u_{1j})h(u_{2j},u_{1j})$$

Obsérvese que en la definición de $\in_{1j}$ figura explícitamente la utilidad básica u_{2j} del resultado de la acción rechazada en el estado s_j. Del mismo modo, en $\in_{2j}$ figura u_{1j}. Así, la valoración queda doblemente relativizada, por un lado a través de la diferencia $u_{ij} - u_{kj}$, y por otro, mediante la función $h(u_{ij}, u_{kj})$ $i,k = 1,2,\ i \neq k$. Esta estructura determina, como se verá más adelante, propiedades de simetría en las funciones de valoración.

Es natural imponer que $h(u_{ij},u_{kj}) \geq 0$ $(i,k=1,2;\ i\neq k)$, ya que en otro caso se invertiría el sentido de la valoración relativa básica. Según se tenga h(. .) mayor o menor que la unidad el efecto será una expansión o una contracción de la utilidad relativa básica $u_{ij}-u_{kj}$, respectivamente. Se podría interpretar que h(.,.) recoge diferentes actitudes psicológicas del individuo: arrepentimiento, frustación, regocijo, responsabilidad...

También es natural imponer que la utilidad expandida $\in_{ij}$ crezca con u_{ij} (utilidad básica del resultado de la elección elegida) y decrezca con u_{kj} (utilidad asociada al resultado de la acción rechazada).

Continuando con el esquema de Loomes y Sugden, nuestra propuesta consiste en suponer que la elección se lleva a cabo como si los agentes maximizasen la esperanza de la utilidad expandida, esto es:

$$A_1 \gtrsim A_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \pi_j \ (\in_{1j}-\in_{2j}) \geq 0$$

La función $\Psi(u_{1j},u_{2j}) = \epsilon_{1j} - \epsilon_{2j}$ representaría el balance de la utilidad expandida en el estado s_j para la elección de A_1 y el rechazo de A_2.

LLamando $H(u_{1j},u_{2j}) = h(u_{1j},u_{2j}) + h(u_{2j},u_{1j})$, se tendría:

$$\Psi(u_{1j},u_{2j}) = (u_{1j}-u_{2j})H(u_{1j},u_{2j})$$

Y la regla de elección se expresa:

$$A_1 \gtrsim A_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \pi_j \, \Psi(u_{1j},u_{2j}) \geq 0$$

Esta regla de elección entre pares de acciones alternativas no dará en general una ordenación de las preferencias sobre el conjunto total de las mismas, pudiendo presentarse ciclos cuando se valoran tres o más acciones. Son numerosos los experimentos que evidencian preferencias cíclicas en determinados problemas de elección en condiciones de riesgo (Véanse por ejemplo: Fishburn (1984, 1988) Loomes, Starmer y Sugden (1989, 1991)), por lo que dar cabida a esta posibilidad dentro de nuestro modelo no puede ser considerado como una debilidad del mismo.

Nótese también que la representación obtenida para las preferencias entre pares de acciones, resulta independiente de las transformaciones de semejanza de razón positiva sobre h y en consecuencia sobre H y Ψ, de modo que h y αh con $\alpha>0$, modelizan al mismo agente.

Al objeto de hacer operativas las propuestas anteriores, impondremos:

HIPOTESIS A.1. $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ depende sólo de la diferencia $\xi_j = u_{1j} - u_{2j}$ en cada estado s_j del mundo, con lo que

$$H(\xi_j) = h(\xi_j) + h(-\xi_j) \geq 0 \text{ y por tanto , } \Psi(\xi_j) = \xi_j H(\xi_j)$$

La regla de elección se expresa ahora:

$$A_1 \gtrsim A_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \pi_j \xi_j \; H(\xi_j) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \pi_j \; \Psi(\xi_j) \geq 0$$

En el caso de que H(.) sea constante, la regla anterior correspondería a la de Von Neumann y Morgenstern.

Por simplificar la notación prescindimos a partir de ahora del subíndice j.

Formalmente, el conjunto de supuestos que exigiremos a la función $h(\xi)$ y a su derivada $h'(\xi)$ será el siguiente,

HIPOTESIS A.2.

S.1: $h(\xi) > 0, \; \forall\xi \neq 0, \; h(0) \geq 0$

S.2: $h(\xi)$ es de clase C^2 **S.3:** $h(\xi) + \xi h'(\xi) > 0 \quad \forall\xi \neq 0$

S.4: $h'(\xi) \geq h'(-\xi)$ o bien $h'(\xi) \leq h'(-\xi) \quad \forall\xi > 0$

El supuesto S.1, además de imponer que $h(\xi) \geq 0 \; \forall\xi$, excluye la posibilidad de que los agentes consideren indistinguibles estados del mundo para los que pueda obtenerse distinto resultado según la elección, propiedad esta última que también verifican los agentes Von Neumann y Morgenstern.

S.2 es un supuesto técnico del que se podría prescindir en una versión más general (1).

---

1 Sustituyendo S.2 por S'2: $h(\xi)$ es de clase C^2 en $\mathbb{R}\backslash(0)$ de manera que sean finitos los límites laterales de h en el origen y definiendo h(0) como la media de dichos límites, se obtendría una versión más general, que amplía el campo de la modelización. Ver Sirvent y Tomás 1992b).

El supuesto S.3, plasma el crecimiento regular de la utilidad expandida ϵ_{ij} con la utilidad relativa ξ_j, es decir, $h(\xi) + \xi h'(\xi) > 0$ significa que $\frac{d\epsilon_1}{d\xi} > 0 \ \forall\xi\neq 0$ y a su vez que $\frac{d\epsilon_2}{d\xi} = -h(-\xi)+\xi h'(-\xi) = -[h(-\xi) - \xi h'(-\xi)] < 0$. Se postula en definitiva, que la expansión o contracción determinada por $h(\xi)$ no altera la monotonía de la valoración.

Las condiciones alternativas del supuesto S.4 determinan dos actitudes temperamentales distintas a la hora de expandir o contraer la valoración relativa básica, lo que permite clasificar a los individuos en:

"Temperamentales frente al éxito/fracaso" cuando:

$$h'(\xi) \geq h'(-\xi), \ \xi > 0$$

"Tibios frente al éxito/fracaso" cuando:

$$h'(\xi) \leq h'(-\xi), \ \xi > 0$$

Estas condiciones pueden interpretarse de la siguiente manera: los agentes temperamentales son aquellos que manifiestan una mayor sensibilidad frente a las ganancias que frente a las pérdidas en términos de utilidad relativa, mientras que los individuos que hemos llamado tibios son más sensibles frente a estas últimas. Las diferencias de sensibilidad en la valoración de pérdidas y ganancias en términos absolutos, han sido apuntadas por otros autores como por ejemplo Kahnemann y Tversky (1979,1991) y Sugden (1987).

Por otra parte, estas condiciones garantizan una mínima regularidad de comportamiento que, además de hacer manejable la teoría, permiten abarcar una gran variedad de respuestas psicológicas.

CONSECUENCIAS DE A.1 Y A.2:

a) $H(\xi) = h(\xi) + h(-\xi) > 0 \ \forall\xi \neq 0$, $H(0) \geq 0$.
b) $H(\xi) = H(-\xi) \ \forall\xi$ (simetría).

c) $H(\xi)$ es de clase C^2 por serlo $h(\xi)$.

d) $H'(\xi) = h'(\xi) - h'(-\xi) \quad \forall\xi$ de manera que, por S.4, se tendrán las dos siguientes posibilidades:

(i) $H'(\xi) \geq 0$, cuando $\xi>0$ y por simetría de $H(\xi)$, $H'(\xi) \leq 0$ con lo que $H(\xi)$ será cuasiconvexa $\forall\xi$, o bien:

(ii) $H'(\xi) \leq 0$, cuando $\xi > 0$ y $H(\xi)$ es cuasicóncava $\forall\xi$ pero no puede ser cóncava, ya que $H(\xi) \geq 0 \ \forall \ \xi$.

(iii) En cualquier caso $H'(0)=0$.

Cuando $H(.)$ es cuasiconvexa, reflejaría actitudes en las que se resaltan las utilidades relativas grandes: "amor al éxito". Por el contrario, cuando $H(.)$ sea cuasicóncava, quedarían resaltadas las pequeñas utilidades relativas: "tibieza frente al éxito".

e) La función $\Psi(\xi) = \xi H(\xi)$ es de clase C^2.

f) $\Psi(\xi) = \xi \ H(\xi) = - \Psi(-\xi)$ (hemisimetría) y $\Psi(0)=0$

g) $\Psi(\xi)$ es estrictamente creciente:

$$\Psi(\xi) = \xi H(\xi)= \xi\left[h(\xi)+h(-\xi)\right] = \xi h(\xi) - \left[-\xi h(-\xi)\right] = \epsilon_1 - \epsilon_2.$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{d\epsilon_1}{d\xi} - \frac{d\epsilon_2}{d\xi} > 0, \ \forall\xi\neq 0$$ y como $\Psi(0)=0$, $\Psi(\xi)$ será estrictamente creciente $\forall\xi$.

De todo lo anterior se concluye que $\Psi(\xi)$ será cuasimonotónica estricta, es decir, cuasicóncava y cuasiconvexa estricta.

Loomes y Sugden (1982,1987) consiguen explicar las paradojas más frecuentes de la Utilidad Esperada haciendo la hipótesis de que $\Psi(.)$ es convexa estricta para argumentos positivos, siendo razones empíricas las que les inclinan a imponer esta condición.

Desde la perspectiva más amplia de la versión expandida en la que $\Psi(.)$ es cuasimonotónica, se puede dar cabida no sólo al supuesto anterior sino a otras respuestas , incluso opuestas, que también se reflejan en los mismos experimentos.

Quede claro que aunque la utilidad básica u(.) sobre la riqueza poseida con certidumbre es independiente de las transformaciones afines positivas y tal propiedad es heredada por la Utilidad Esperada de Von Neumann y Morgenstern, ello no es así para la Utilidad Expandida salvo en los casos en que $H(\xi)$ sea constante o, bajo la hipótesis A.1 sea homogénea. Se hará preciso por tanto adoptar una normalización. No hay dificultad en tomar u(.) de forma que $u(x_{max}) = 1$ y $u(x_{min}) \geq 0$. Además, mediante un adecuado cambio de unidades podemos tomar $x_{max} = 1$. Con ello, las utilidades relativas ξ_j tomarán valores en el intervalo [-1, 1].

Indice temperamental TAU.

La versión expandida de la teoría del arrepentimiento postula dos tipos básicos de respuesta psicológica frente al posible éxito o fracaso en los problemas de elección entre pares de alternativas en condiciones de riesgo, que han sido denominados actitud temperamental y actitud de tibieza.

Recordemos que los agentes temperamentales son aquellos que, en cada estado del mundo, expanden la correspondiente utilidad relativa mediante una función que es creciente para los argumentos positivos, lo que equivale a decir que esta clase de agentes resalta en la valoración a priori de las acciones, precisamente las mayores diferencias de utilidad. Por su parte, los agentes tibios resaltan las pequeñas utilidades relativas al expandirlas mediante una función que es decreciente para argumentos positivos. Los agentes con función expansora constante (neutrales frente al éxito/fracaso) valoran los pares de acciones maximizando la esperanza de la utilidad relativa: son los agentes Von Neumann y Morgenstern.

Vinculada la actitud frente al riesgo a la forma (cóncava o convexa) de la función de utilidad básica u(.) sobre los resultados monetarios ciertos, el índice de Arrow-Pratt (Pratt (1964)) resulta una medida local adecuada de la intensidad o grado de aversión al riesgo relacionado con el grado local de concavidad (curvatura) de la función de utilidad particular de cada individuo.

Al tener en cuenta la respuesta temperamental de los agentes en problemas de elección en condiciones de riesgo con resultados monetarios, nos proponemos construir un índice que mida la intensidad y el sentido de dicha actitud, variables de un individuo a otro. Puesto que las actitudes frente al éxito/fracaso han sido vinculadas al carácter creciente o decreciente de la función expansora, parece natural definir tal índice a través de la elasticidad de la mencionada función expansora, por lo que damos la siguiente definición:

Definición 3.- Para cada utilidad relativa $\xi>0$ llamamos índice temperamental $\tau(\xi)$ del agente con función expansora $H(\xi)$, a la elasticidad de dicha función:

$$\tau(\xi) = \xi \frac{H'(\xi)}{H(\xi)}$$

Como para $\forall\xi\neq 0$, $H(\xi)$ es estrictamente positiva, $\tau(\xi)$ está bien definido para todo tipo de agentes.

Obsérvese que una utilidad relativa nula, determina que el estado del mundo que la genera sea irrelevante en la elección. Ello es así en la Teoría Clásica de la Utilidad Esperada y también en nuestra versión de Teoría del Arrepentimiento. Por ello, el que $\tau(\xi)$ pudiera no estar definido en el origen, no afecta a los resultados.

Comprobaremos que $\tau(\xi)$ verifica las siguientes propiedades:

Propiedad 1.- Siempre que $\tau(\xi)$ mantenga signo constante $\forall\ \xi > 0$ el índice permite clasificar a los agentes en tibios, neutrales y temperamentales frente al éxito/fracaso.

(i): $\tau(\xi) = 0\ \forall\xi>0 \Leftrightarrow$ el agente es neutral al éxito/fracaso:

$\tau(\xi) = 0\ \forall\xi>0 \Leftrightarrow H'(\xi) = 0\ \forall\xi>0 \Leftrightarrow H(\xi)$ es constante $\Leftrightarrow \Psi(\xi)$ es lineal, es decir se trata de agentes Von Neumann & Morgenstern.

(ii): $\tau(\xi) > 0\ \forall\xi>0 \Leftrightarrow$ el agente es temperamental:

$$\forall\xi > 0,\ \tau(\xi) = \xi\frac{H'(\xi)}{H(\xi)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad H'(\xi) > 0 \quad \forall\xi > 0, \text{ por ser } H(\xi) > 0\ \forall\xi$$

(iii): $\tau(\xi) < 0 \quad \forall\xi>0 \Leftrightarrow H'(\xi) < 0\ \forall\xi>0 \Leftrightarrow$ el agente es tibio frente al éxito/fracaso.

Se está suponiendo que $H'(\xi) \neq 0\ \forall\xi \neq 0$. Si se incluye esta posibilidad, agentes temperamentales o tibios podrían localmente comportarse como neutros.

Propiedad 2.- El índice temperamental $\tau(\xi)$ es independiente de las transformaciones de semejanza de razón positiva sobre la función expansora.

Como sabemos, $H_A(\xi)$ y $H_B(\xi) = \alpha\ H_A(\xi)$ con $\alpha>0$ modelizan el mismo tipo de agente. Se tendrá entonces:

$$\tau_B(\xi) = \xi\frac{H'_B(\xi)}{H_B(\xi)} = \xi\frac{\alpha\ H'_A(\xi)}{\alpha\ H_A(\xi)} = \tau_A(\xi)$$

Propiedad 3: El índice temperamental $\tau(\xi)$ es independiente de la escala adoptada para medir las utilidades relativas y de las transformaciones afines positivas en la función de utilidad básica u(.).

La primera afirmación es obvia por la propia definición de $\tau(\xi)$ como elasticidad y con ello, la segunda resulta inmediata al ser la utilidad relativa la diferencia entre las utilidades básicas de los resultados de las acciones alternativas en cada estado del mundo.

Propiedad 4.- Para cada valor fijo ξ_0, el índice temperamental $\tau(\xi_0)$ establece una ordenación de los agentes según su grado temperamental.

Fijada la utilidad relativa $\xi = \xi_0 > 0$, el índice temperamental $\tau_0 = \tau(\xi_0)$ dependerá del valor $H_0 = H(\xi_0)$ y de la pendiente $H'_0 = H'(\xi_0)$ de la función $H(\xi)$ del agente, de modo que $\tau_0 = \tau(H'_0, H_0)$, entonces:

(i) $$\frac{\partial \tau_0}{\partial H'_0} = \frac{\xi_0}{H_0} > 0$$

El grado de temperamentalidad crece con la pendiente de H_o.

(ii)
$$\frac{\partial \tau_0}{\partial H_0} = -\xi_0 \frac{H'_0}{[H_0]^2} \text{ de modo que:}$$

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial H_0} > 0 \quad \text{cuando el agente es tibio frente al éxito y}$$

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial H_0} < 0 \quad \text{cuando el agente es temperamental}$$

con lo que la intensidad de la actitud temperamental crece con H_0 para los agentes tibios y decrece para los temperamentales.

Propiedad 5: Para cada $\xi = \xi_0$ particular, $\tau(\xi_0)$ está acotado inferiormente.

Puesto que la función $\Psi(\xi)$ es estrictamente creciente, las funciones expansoras $H(\xi)$ admisibles en el modelo deben ser tales que $H(\xi) + \xi H'(\xi) > 0$, y por lo tanto $\tau(\xi) > -1$.

Resulta entonces intuitivo el esperar una mayor proporción de agentes temperamentales que de tibios en cualquier muestra uniforme de población, como queda reflejado en la figura 1.

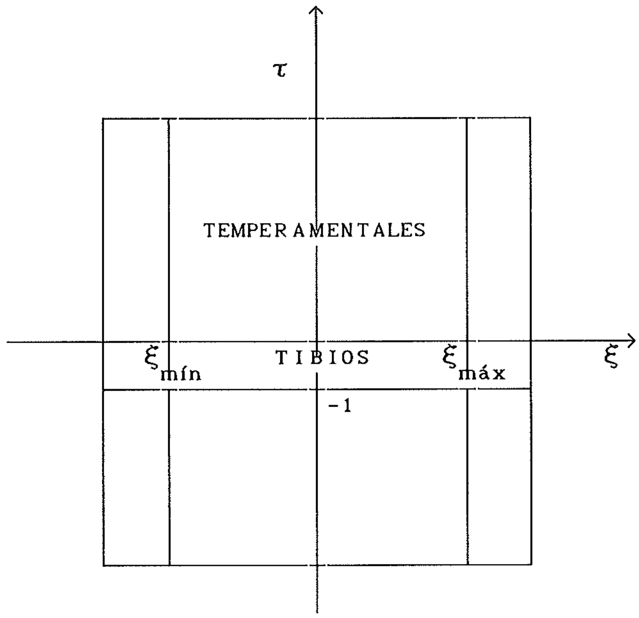


FIG. 1

Los resultados de numerosos experimentos, como por ejemplo los recogidos en Loomes (1987); Loomes, Starmer y Sugden (1991) en los que se pone de manifiesto que los agentes eligen en condiciones de riesgo violando los supuestos y consecuencias de la Utilidad Esperada, son conformes con la predicción de nuestro modelo en el sentido de que las opciones mayoritarias se corresponden con las de los agentes temperamentales y las minoritarias con las de los tibios. De ello vamos a ocuparnos en la siguiente sección analizando el experimento de Kanheman y Tversky (1979) relativo al seguro probabilístico.

2.- SEGURO PROBABILISTICO

El seguro probabilístico se diferencia del seguro pleno en que a cambio de reducir la cuantía de la prima, el agente se enfrenta, en caso de pérdida, a una lotería en la cual la compañía sólo cubre ésta en determinados casos, mientras que en otros no se hace cargo de la misma.

No son infrecuentes las situaciones que se pueden englobar en el modelo general de un seguro probabilístico: un seguro agrario en el que, al asegurar la cosecha, la compañía sólo cubre la pérdida cuando la causa ha sido una helada y no si lo ha sido el pedrisco, el robo, las plagas... Un seguro automovilístico en el que el precio de la póliza está condicionado a que en caso de accidente el conductor sea el habitual o por el contrario lo sea la esposa, amigo... Asimismo, la instalación de una alarma, la revisión de los neumáticos, un chequeo médico y otras formas de protección frente a los riesgos podrían considerase dentro de este modelo. Téngase en cuenta sobre todo que en la práctica, todo contrato de seguro incluye cláusulas excluyentes de compensación en caso de pérdida (letra "pequeña") y, en este sentido, tales contratos pueden ser considerados como seguros probabilísticos.

Este tipo de seguro vendría recogido en el siguiente modelo:

Sea un agente con riqueza $w = 1$ que se enfrenta a una pérdida de cuantía x, $0 < x < 1$ con probabilidad estimada π.

Consideremos los siguientes estados del mundo:

s_1 que se produzca la pérdida por una causa específicamente estipulada, con probabilidad $r\pi$, $0 < r < 1$.

s_2 que se produzca la pérdida por cualquier otra causa, con probabilidad $(1-r)\pi$.

s_3 que no haya pérdida con probabilidad $(1-\pi)$.

Se tiene la siguiente matriz de resultados:

ESTADOS	PERDIDA		NO PERDIDA
	s_1 πr	s_2 $(1-r)\pi$	s_3 $1-\pi$
ACCIONES			
(A_1, γ)	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$
(A_2, γ)	$1-r\gamma$	$1-x-r\gamma$	$1-r\gamma$
(A^*, γ)	$1-\gamma$	$1-x$	$1-r\gamma$
(A_0)	$1-x$	$1-x$	1

(A_1,γ) corresponde al seguro pleno, (A_2,γ) al seguro probabilístico (A^*_2, γ) es el seguro probabilístico particular de Kahneman y Tversky (1979) y A_0 representa enfrentarse al riesgo sin cobertura alguna. Llamando γ a la prima correspondiente al seguro pleno, $r\gamma$ es la prima reducida que el agente paga por el seguro probabilístico, para el que recibe compensación de la pérdida si se da el estado s_1 con probabilidad $r\pi$.

El modelo de seguro probabilístico (A_2, γ), será analizado en la sección 3 dentro de un modelo más general de protección frente al riesgo. continuación estudiaremos con detalle el caso particular de seguro probabilístico (A^*_2,γ) que utilizaron Kahneman y Tversky par evidenciar algunas contradicciones de la teoría tradicional.

Estos autores propusieron el siguiente problema a 95 estudiantes en la Universidad de Stanford: "Supongamos que un individuo considera la posibilidad de asegurar alguna de sus propiedades frente a un posible siniestro. Después de examinar las condiciones del contrato que le ofrece la compañía, *el individuo duda entre comprar la póliza o bien dejar su propiedad sin asegurar*. La compañía, entonces, le ofrece el siguiente programa: Un contrato por el que el individuo paga la mitad de la prima y en caso de siniestro, con probabilidad 1/2, el asegurado paga la otra mitad de la prima y la compañía le cubre la pérdida, y con probabilidad 1/2 la compañía le devuelve la prima cobrada y no cubre la pérdida: (A_2^*, γ) con r = 1/2. ¿Compraría entonces el seguro probabilístico?" La respuesta fué afirmativa para el 20% de los encuestados, mientras que el 80% rechazó el seguro probabilístico.

2.1.- Utilidad Esperada y Seguro Probabilístico

Vamos a demostrar en primer lugar, con mayor generalidad que en Kahneman y Tversky (1979), que en contra de la evidencia del experimento anterior, la TUE aplicada a dicho problema predice que los individuos aversos al riesgo prefieren el seguro probabilístico al seguro pleno *para cualquier valor del parámetro r*. La acción (A_2^*, γ) correspondiente al seguro probabilístico particular de Kahneman y Tversky es: $(1-\gamma, 1-x, 1-r\gamma)$ para los estados del mundo s_1, s_2 y s_3 arriba especificados.

Sea γ^* *la prima para la cual el agente es indiferente entre tomar el seguro pleno y no asegurarse.* Si el individuo es averso al riesgo y valora las loterías por su utilidad esperada, dicha prima es estrictamente mayor que el valor esperado de la pérdida πx, esto es, $\gamma^* > \pi x$. Las primas ofertadas por las compañías de seguros tienen que verificar $\gamma \geq \pi x$, por lo que el rango de valores plausibles para ellas se sitúa en el intervalo $[\pi x, \gamma^*]$.

La utilidad esperada del seguro probabilístico es:

$$U(A_2^*,\gamma) = \pi r u(1-\gamma) + (1-r)\pi u(1-x) + (1-\pi)u(1-r\gamma)$$

La utilidad del seguro pleno es: $U(A_1,\gamma) = u(1-\gamma)$

Si el agente es averso al riesgo, la desigualdad de Jensen implica que:

$$U(A_2^*,\gamma) < u[r\pi(1-\gamma) + (1-r)\pi(1-x) + (1-\pi)(1-r\gamma)]$$

Para el caso de que $\gamma = \pi x$, se tiene

$$U(A_2^*,\pi x) < u(1-\pi x) = U(A_1,\pi x)$$

por lo que, en estas condiciones, el agente prefiere el seguro pleno.

Tomemos ahora $\gamma = \gamma^*$. En este caso, por la definición de γ^*, se tiene: $\pi u(1-x) + (1-\pi)u(1) = u(1-\gamma^*)$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $u(1-x) = 0$, de donde se obtiene $u(1-\gamma^*) = (1-\pi)u(1)$ y

$$U(A_2^*,\gamma^*) = \pi r u(1-\gamma^*) + (1-\pi)u(1-r\gamma^*).$$

El seguro probabilístico será preferido al pleno si

$$\pi r u(1-\gamma^*) + (1-\pi)u(1-r\gamma^*) > u(1-\gamma^*)$$

es decir, si

$$(1-\pi)u(1-r\gamma^*) > (1-r\pi)u(1-\gamma^*) = (1-r\pi)(1-\pi)u(1)$$

o, lo que es equivalente si $u(1-r\gamma^*) > (1-r\pi)u(1)$. Ahora bien, la condición anterior se satisface si y sólo si u es cóncava, pues en este caso se tiene que $u(1-r\gamma^*) > (1-r)u(1) + ru(1-\gamma^*)$. Para γ^*, pues, el agente averso al riesgo prefiere el seguro probabilístico al pleno con independencia del valor de r.

Sea $\phi(\gamma) = U(A_2^*,\gamma) - U(A_1,\gamma)$. Entonces ϕ es continua y diferenciable si u lo es, y además $\phi'(\gamma) > 0$ para todo γ. Por otra parte, $\phi(\pi x) < 0$, mientras que $\phi(\gamma^*) > 0$, por lo que, para los agentes maximizadores de la utilidad esperada aversos al riesgo, existe un valor $\bar{\gamma}$, $\pi x < \bar{\gamma} < \gamma^*$, de tal forma que si $\gamma \in [\pi x,\bar{\gamma})$, preferirán el seguro pleno. En $\gamma = \bar{\gamma}$ se dará la indiferencia y si $\gamma \in (\bar{\gamma},\gamma^*]$, optarán por el seguro probabilístico.

Kahneman y Tversky subrayan la contradicción de que sea precisamente la hipótesis de aversión al riesgo la causa de la elección del seguro probabilístico cuando intuitivamente es más arriesgado que el seguro pleno (Kahneman y Tversky, 1979, pag. 270).

Si consideramos el caso de un agente neutro al riesgo, éste será indiferente entre tomar el seguro pleno y no asegurarse para $\gamma = \pi x$. (Efectivamente, en este caso, $U(A_2^*,\gamma) = r\pi(1-\gamma) + (1-r)\pi(1-x) + (1-\pi)(1-r\gamma)$, por lo que se tiene que $U(A_2^*,\pi x) = 1-\pi x = U(A_1,\pi x)$, y el agente neutro es indiferente entre el seguro pleno y el probabilístico). Para valores de $\gamma > \pi x$, el agente neutro prefiere el seguro probabilístico.

El ejemplo planteado en el experimento de Kahneman y Tversky (1979) se corresponde con el caso $\gamma = \gamma^*$ y $r = 1/2$, siendo claro que la predicción de la Teoría de la Utilidad Esperada de que los individuos aversos al riesgo van a preferir el seguro probabilístico resulta claramente violada.

2.2.- La utilidad expandida y el seguro probabilístico (A_2^*,γ).

Vamos a ver cómo mediante la aplicación de la utilidad expandida se generan resultados consistentes con las observaciones empíricas para la comparación entre el seguro probabilístico y el seguro pleno.

Para la matriz de resultados contingentes anteriormente presentada, un agente preferirá el seguro pleno (A_1,γ) al probabilístico (A_2^*,γ) si:

$$(A_1,\gamma) \geq (A_2^*,\gamma) \Longleftrightarrow \pi r\ \Psi[u(1-\gamma) - u(1-\gamma)] +$$

$$+\ \pi(1-r)\ \Psi[u(1-\gamma) - u(1-x)] + (1-\pi)\ \Psi[u(1-\gamma) - u(1-r\gamma)] \geq 0$$

Se pretende que la actitud frente al éxito/fracaso en los agentes, con independencia de su aversión al riesgo, permita explicar los hechos observados y por ello, a partir de este momento consideraremos agentes neutros al riesgo por lo que tomamos $u(\alpha) = \alpha$. Es claro que, en estas condiciones, un agente VNM es indiferente entre ambas opciones.

Siendo la función $\Psi(\xi) = \xi H(\xi)$ con $H(\xi)$ simétrica, $\Psi(0) = 0$ y $0<r<1$, se tiene

$$(A_1,\gamma) \geq (A_2^*,\gamma) \iff \pi(1-r)(x-\gamma)\ H(x-\gamma) + (1-\pi)\ \gamma(r-1)\ H[\gamma(r-1)] \geq 0$$

$$\iff \pi(x-\gamma)\ H(x-\gamma) \geq (1-\pi)\ \gamma\ H[\gamma(1-r)].$$

Tomando $\gamma = \pi x$ (prima sin gastos), se tiene

$$(A_1,\gamma) \gtrsim (A_2^*,\gamma) \iff \pi(x-\pi x)\ H\ [x-\pi x] \geq (1-\pi)\pi x\ H[\pi x(1-r)]$$

$$\iff H[x(1-\pi)] \geq H[x\pi(1-r)].$$

Caso a) Supongamos un individuo "temperamental" para el cual $H(.)$ es creciente para argumentos positivos, entonces

$$(A_1,\gamma) \geq (A_2^*,\gamma) \iff 1-\pi \geq \pi(1-r)$$

$$\iff \boxed{r \geq 2 - \frac{1}{\pi}}$$

Si se considera la prima para la cual el individuo es indiferente entre tomar seguro pleno o no asegurarse, sabemos que la indiferencia entre una y otra opción se da en este caso para $\pi = \frac{1}{2}$ (Sirvent y Tomás 1992a). En estas condiciones, puesto que $0 < r < 1$, el agente preferiría el seguro pleno para cualquier r, lo que es consistente con la observación empírica de Kahneman y Tversky.

Para probabilidades $\pi < 1/2$ siempre prefiere el seguro pleno (fig. 2), ya que para cualquier r siempre se cumple $r > 2 - \frac{1}{\pi}$.

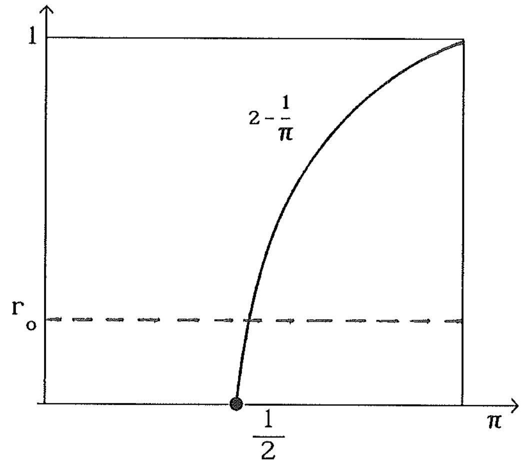


fig. 2

Como se prueba en Sirvent y Tomás (1992a), para $\pi < \frac{1}{2}$ los agentes temperamentales también prefieren el seguro pleno al no seguro.

Para probabilidades mayores que $\frac{1}{2}$, la elección dependerá del valor de r y si éste es lo suficientemente grande, un individuo temperamental también elegirá el seguro pleno.

Así pues, la actitud frente al éxito/fracaso en los individuos que llamamos temperamentales, sería una condición que explicaría en este problema la elección mayoritaria del seguro pleno frente al probabilístico, como se refleja en los resultados experimentales si se tiene en cuenta que debe existir una mayor proporción de esta clase de agentes en cualquier muestra uniforme de población.

Caso b): $H(\xi)$ decreciente $\xi > 0$. Individuo "tibio" al fracaso.

En este caso la elección vendrá determinada por:

$$(A_1,\gamma) \underset{\sim}{>} (A_2^*,\gamma) \iff H[x(1-\pi)] \geq H[\pi x(1-r)]$$

$$\iff 1-\pi \leq \pi(1-r)$$

$$\iff \boxed{r \leq 2 - \frac{1}{\pi}}$$

Para la prima que haga al individuo indiferente entre el seguro pleno y el no seguro, la probabilidad será igual a $\pi = \frac{1}{2}$ (Sirvent y Tomás (1992a)),y en este caso preferirá el seguro probabilístico

En general, para probabilidades $\pi \leq \frac{1}{2}$ el agente prefiere el seguro probabilístico frente al seguro pleno para primas justas sin gastos $\gamma=\pi x$, obteniéndose elecciones de sentido opuesto a las de los agentes temperamentales.

Para probabilidades $\pi > \frac{1}{2}$, la relación dependerá del valor de r, obteniéndose siempre un resultado que es imagen refleja del caso temperamental. Es interesante notar que los resultados apuntados al final de la sección 1 sobre las diferentes proporciones de agentes temperamentales y tibios frente al éxito/fracaso , estarían plenamente de acuerdo con las observaciones empíricas. Efectivamente, el modelo de la Utilidad Expandida predice una mayor proporción de agentes temperamentales que prefieren el seguro pleno al probabilístico de modo acorde a los resultados del experimento de Kahneman y Tversky. Además, la superposición de la actitud frente al éxito/fracaso a la aversión al riesgo, determinará una expansión del espacio de seguro pleno, como también la posible inclusión de gastos en la prima provoca una contracción del mismo (ver Sirvent y Tomás 1992a) todo lo cual, reforzaría el acuerdo con la evidencia experimental.

Avanzando en el análisis, consideremos las acciones: Seguro pleno (A_1,γ), Seguro probabilístico (A_2^*,γ) y no seguro, para las que sabemos que un agente maximizador de la utilidad esperada, neutral frente al riesgo, es indiferente a prima sin gastos. Veremos qué resultados aporta la Teoría de la Utilidad Expandida para las elecciones binarias entre ellas.

ESTADOS	PERDIDA		NO PERDIDA
	S_1 πr	S_2 $(1-r)\pi$	S_3 $1-\pi$
ACCIONES			
(A_1, γ)	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$
(A_2^*, γ)	$1-\gamma$	$1-x$	$1-r\gamma$
A_0	$1-x$	$1-x$	1

Conocido el resultado que se obtiene al enfrentar el seguro pleno y la inacción A_0 (no seguro) (Sirvent y Tomás 1992a), y el obtenido más arriba sobre el seguro probabilístico y el seguro pleno, sólo resta analizar la elección entre el seguro probabilístico y el no seguro.

Manteniendo el supuesto de neutralidad frente al riesgo tendremos.

$$(A_2^*,\gamma) \geq A_0 \Longleftrightarrow \pi r\ \psi(-\gamma+x) + (1-\pi)\ \psi(-r\gamma) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \pi r(-\gamma+x)\ H(-\gamma+x) - (1-\pi)\ r\gamma\ H(r\gamma) \geq 0$$

Por la simetría de H(.)

$$\Longleftrightarrow \pi(-\gamma+x)\ H(-\gamma+x) \geq (1-\pi)\ \gamma H(r\gamma)$$

Tomando $\gamma = \pi x$

$$\Longleftrightarrow \pi x(-\pi+1)\ H[x(-\pi+1)] \geq (1-\pi)\pi x\ H(r\pi x)$$

$$\Longleftrightarrow H[x(1-\pi)] \geq H[\pi r x]$$

Caso a): Individuos temperamentales. $H'(\xi) > 0 \ \forall \ \xi > 0$

$$(A_2^*,\gamma) \geq A_0 \Leftrightarrow H[x(1-\pi)] \geq H[\pi r x]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \leq \frac{1-\pi}{\pi}}$$

Para $\pi \leq \frac{1}{2}$ se tiene $(A_2^*,\gamma) > A_0$ y es preferido el seguro probabilístico.

Para $\pi > \frac{1}{2}$ la elección dependerá del valor de r.

Caso b): Individuos tibios. $H'(\xi) < 0 \quad \forall \ \xi > 0$

$$(A_2^*,\gamma) \geq A_0 \Leftrightarrow H[x(1-\pi)] \geq H[\pi r x]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \geq \frac{1-\pi}{\pi}}$$

Para $\pi \leq \frac{1}{2}$ $A_0 > (A_2^*,\gamma)$, se rechaza el seguro probabilístico.

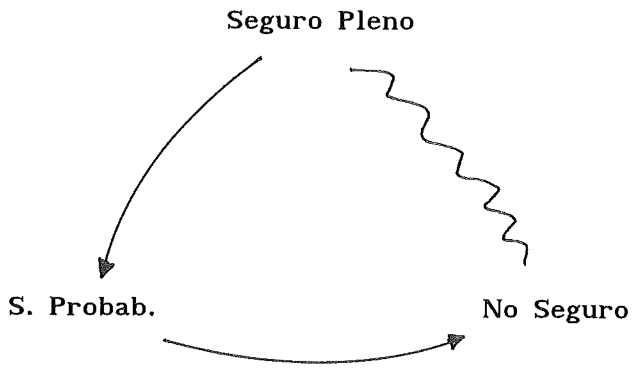
Para $\pi > \frac{1}{2}$ la elección depende del valor de r.

Obsérvese que cuando la elección depende de r, en ambos casos para $\pi > \frac{1}{2}$, la indiferencia se tendrá en $r = \frac{1-\pi}{\pi}$, dependiendo el sentido de la elección del tipo de individuo, en un sentido para el averso y en el opuesto para el tibio.

El siguiente esquema recoge los resultados obtenidos:

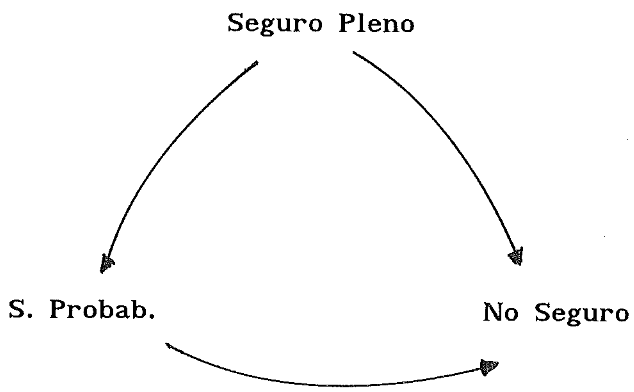
A: AGENTES TEMPERAMENTALES: PRIMA SIN GASTOS

$\pi = \frac{1}{2}$

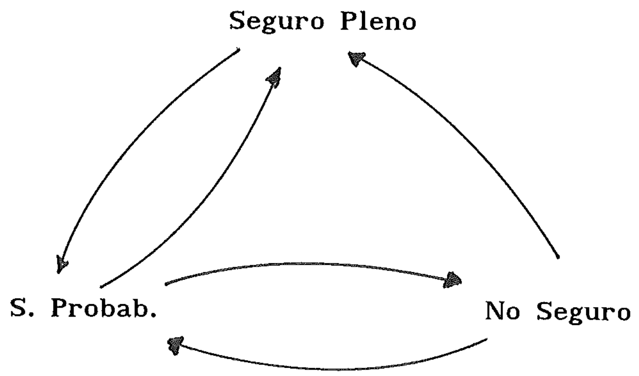


El seguro pleno es preferido al seguro probabilístico y este último al no seguro, siendo el seguro pleno indiferente al rechazo de cualquier tipo de contrato (no seguro).

$\pi < \frac{1}{2}$

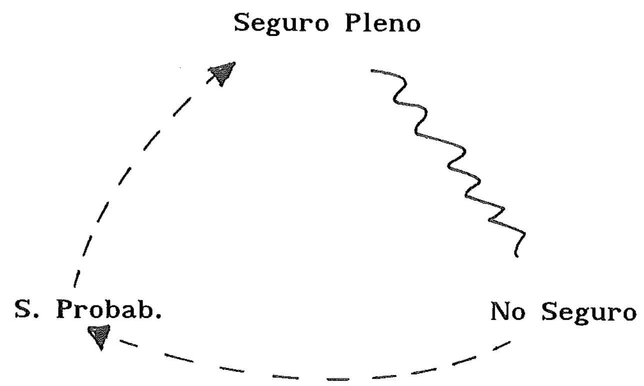


$\pi > \frac{1}{2}$

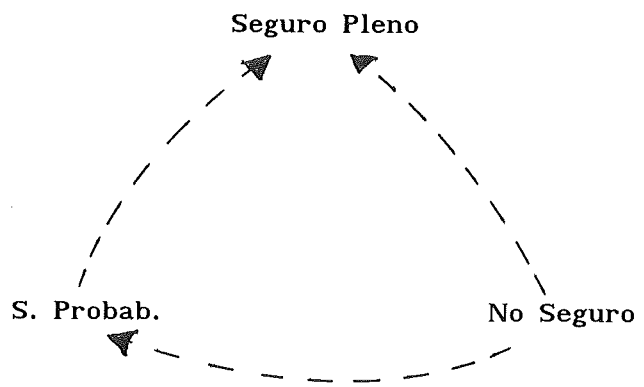


B: INDIVIDUOS TIBIOS AL FRACASO: PRIMA SIN GASTOS

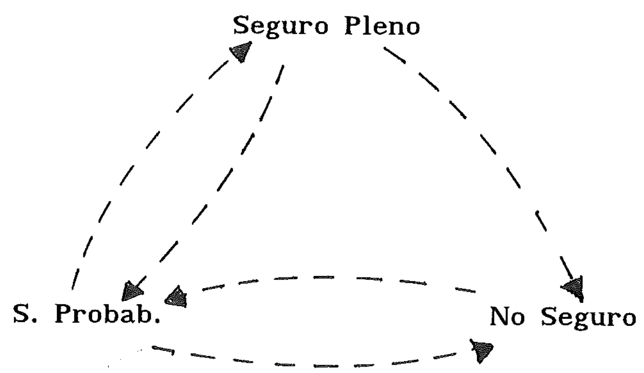
$\pi = \frac{1}{2}$



$\pi < \frac{1}{2}$



$\pi > \frac{1}{2}$



Para ambos temperamentos hay casos en los que las preferencias resultan transitivas y otros en los que pueden aparecer ciclos. El tipo de ciclo posible para los agentes temperamentales es opuesto al tipo de ciclo para los agentes tibios frente al éxito/fracaso.

En definitiva, la actitud frente al éxito/fracaso permite explicar el comportamiento observado de los agentes aun en el caso de que éstos sean neutrales al riesgo. Además, si admitimos que en una muestra uniforme de población debe haber más agentes temperamentales que tibios obtendríamos una aceptable adecuación entre los resultados prescritos por la teoría y los hechos observados.

El comportamiento real de los agentes y la posibilidad de preferencias cíclicas inducen a considerar que los individuos podrían adoptar de hecho acciones mixtas (ver por ejemplo Fishburn (1984) y Herrero (1987)): asegurando plenamente parte de su riqueza, comprando seguros probabilísticos y enfrentándose, sin cobertura alguna, al riesgo de perder el resto de su riqueza.

3. UTILIDAD EXPANDIDA Y PROTECCION.

En un clásico artículo, Erlich y Becker (1972) analizan desde el punto de vista de la Utilidad Esperada las interacciones entre el mercado de seguros y otras formas de protección frente al riesgo. Partiendo del hecho de que los agentes son capaces de influir no sólo sobre la probabilidad con que puede producirse un evento no deseado, sino también sobre la cuantía de la posible pérdida derivada del mismo, estudian por separado las consecuencias de lo que denominan autoprotección y autoseguro.

Recuérdese que se habla de autoprotección cuando hay posibilidad de reducir la probabilidad de un suceso mediante un determinado gasto. Por ejemplo, podemos disminuir la probabilidad de robo en una finca instalando un sistema de alarmas o disminuir la probabilidad de accidente sometiendo nuestro vehículo a revisiones periódicas etc. Cuando se considera la posibilidad de disminuir la cuantía de la pérdida posible, sin influir sobre la probabilidad, se habla de autoseguro. Así, por ejemplo, la instalación de un sistema de aspersores en un edificio puede reducir la cuantía de los daños por incendio sin alterar la probabilidad de que éste se produzca.

Dos de las conclusiones del estudio de Erlich y Becker parecen especialmente sorprendentes: Por un lado, la actitud frente al riesgo no resulta ni necesaria ni suficiente para que los individuos prefieran autoprotegerse a no hacerlo. Por otra parte, la elección de un nivel óptimo de autoseguro es independiente de que los agentes sean aversos al riesgo o neutrales frente al mismo. En este caso, las diferencias entre uno y otro tipo, se establecen cuando los aversos al riesgo aseguran plenamente (si es posible) la pérdida remanente a prima equitativa, mientras los neutrales serán indiferentes ante esta posibilidad. Ello es así también cuando la posibilidad de protección es compatible con el mercado de seguros.

Si bien una teoría binaria no permite, en general, determinar el nivel óptimo de protección, resulta atractivo enfrentar esta posibilidad a la decisión de seguro, incorporando a la valoración tipos de respuestas psicológicas diferentes a la actitud frente al riesgo que, superpuestas o no a ella, puedan tanto prescribir un comportamiento racional de los individuos como explicar de forma adecuada sus elecciones reales.

3.1.- Autoprotección.

Consideremos un individuo con riqueza $W > 0$ que se enfrenta a una pérdida x $(0 < x \leq W)$ con probabilidad conocida π $(0 < \pi < 1)$ de producirse. Supondremos también que, invirtiendo μ unidades monetarias en protección el agente pueda reducir la probabilidad de pérdida (autoprotección en el sentido de Erlich y Becker (1972), de modo que: $\pi(\mu) = r(\mu)\pi$.

Haremos sobre $r(\mu)$ los siguientes supuestos, reflejados en la fig.3:

(*i*) $r(\mu)$ de clase C^2

(*ii*) $r(0) = 1$

(*iii*) $r(\mu) > 0$. En particular $r(\pi x) > 0$ teniendo sólo sentido que $0 \leq \mu \leq \gamma$ (prima de seguro pleno)

(*iv*) $r'(\mu) < 0$

(*v*) $r''(\mu) > 0$ (dificultad creciente en reducir la probabilidad).

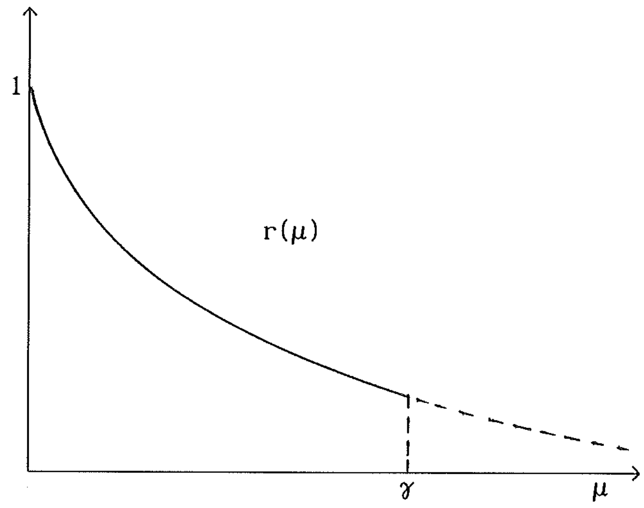


fig. 3

Suponiendo por el momento que no existe mercado de seguros, haremos un análisis clásico del problema de autoprotección bajo los supuestos anteriores: un agente VNM elegirá el nivel de autoprotección que maximice la utilidad esperada de la lotería $(W-x-\mu,\ \pi(\mu);\ W-\mu,\ 1-\pi(\mu))$. La condición de primer orden es:

$$-\pi'(\mu)(u_2-u_1) = (1-\pi(\mu))u'_2+\pi(\mu)u'_1$$

donde $u_1 = u(W-x-\mu)$ y $u_2 = u(W-\mu)$, siendo $u(.)$ la utilidad del individuo sobre la riqueza. La condición de segundo orden es:

$$-\pi''(\mu)(u_2-u_1) + 2\pi'(\mu)(u'_2-u'_1) + \pi(\mu)u''_1+ (1-\pi(\mu))u''_2< 0$$

es claro que la aversión al riesgo $(u''(.) < 0)$ no es condición necesaria ni suficiente para que pueda darse autoprotección.

Analizaremos el caso concreto de un agente neutro al riesgo para el cual $u(\alpha) = \alpha$.

Por (ϑ), $\pi''(\mu\ ) = \pi r''(\mu) > 0$ con lo que la condición de segundo orden se verifica trivialmente. La condición de primer orden proporciona el nivel óptimo de protección μ^* de modo que: $-x\pi'(\mu^*) = 1$, es decir, $r'(\mu^*) = -1/\pi x$.

Vamos a ver que $\mu^* > 0$ existe y es único si se cumple que $r'(0) < -1/\pi x$. Considerando la función lineal $S(\mu) = 1 - \mu/\pi x$, construimos $D(\mu) = S(\mu) - r(\mu)$ (ver fig.4)

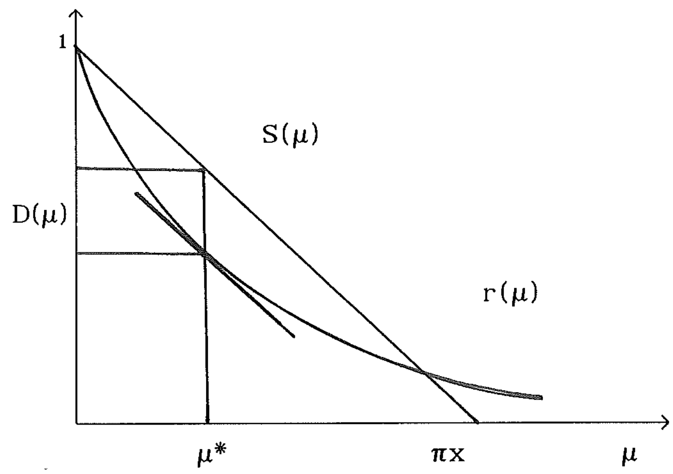


fig. 4

Desarrollando $D(\mu)$ en un entorno a la derecha de $\mu = 0$, si $r'(0) < S'(0) = -1/\pi x$, se tiene $D(h) > 0$, $h > 0$. Por otro lado $D(\pi x) = S(\pi x) - r(\pi x) = -r(\pi x) < 0$ y en consecuencia existe un punto $\pi x-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, tal que $r(\pi x-\varepsilon) = S(\pi x-\varepsilon) = \varepsilon/\pi x$. Existe entonces, $\mu^* \in (0, \pi x-\varepsilon)$ donde $r'(\mu^*) = -1/\pi x$, que además es único por la convexidad estricta de $r(\mu)$.

Obsérvese que el nivel óptimo de autoprotección maximiza $D(\mu)$: $S'(\mu^*) = r'(\mu^*)$ y $D''(\mu) < 0$.

La condición $r'(0) < -1/\pi x$ resulta perfectamente natural ya que en otro caso podrían derivarse problemas de riesgo moral en cuya consideración no pretendemos entrar.

Así pues, bajo las condiciones anteriores, los agentes neutros se autoprotegen, lo que unido a que la utilidad marginal decreciente sobre el dinero no garantiza la autoprotección, resulta paradójico como ya apuntan Erlich y Becker (1972). Estos resultados invitan a analizar el fenómeno haciendo intervenir actitudes psicológicas distintas de la aversión frente al riesgo.

Puesto que utilizaremos una teoría binaria para el estudio de la autoprotección , analizaremos previamente, desde el punto de vista clásico, el problema de decisión entre el seguro pleno a prima γ y autoprotección para un nivel dado μ de la misma.

Puesto que el resultado $W - \gamma$ de la decisión de seguro pleno es independiente del estado del mundo que se realice, podemos enfrentar las acciones: seguro pleno a prima γ, $S(\gamma)$ y autoprotección $P(\mu)$ a nivel μ, a partir de la matriz siguiente:

	s_1 $r(\mu)\pi$	s_2 $1-r(\mu)\pi$
$S(\gamma)$	$W - \gamma$	$W - \gamma$
$P(\mu)$	$W - \mu - x$	$W - \mu$

obsérvese que para $\mu=0$ se tendrá $r(0)=1$ y que $P(0)$ representa la inacción (no seguro).

$$S(\gamma) \underset{\sim}{>} P(\mu) \longleftrightarrow u(W-\gamma) \geq \pi(\mu)u(W-\mu-x) + [1-\pi(\mu)]u(W-\mu)$$

Si normalizamos los resultados de modo que $W-\mu = 1$, se tendrá que $W-\mu-x = 1-x$, y llamando $\alpha = \gamma-\mu$:

$$S(\gamma) \underset{\sim}{>} P(\mu) \longleftrightarrow u(1-\alpha) \geq \pi(\mu)u(1-x) + [1-\pi(\mu)]u(1)$$

que es un problema de elección entre seguro pleno a *prima equivalente* α e inacción para una *probabilidad equivalente* de pérdida $\pi(\mu)$.

a) Agente neutro al riesgo:

$$S(\gamma) \underset{\sim}{>} P(\mu) \longleftrightarrow 1-\alpha \geq \pi(\mu)(1-x) + 1-\pi(\mu) \longleftrightarrow \alpha \leq \pi(\mu)x$$

b) Agente averso al riesgo:

Si $\alpha = \pi(\mu)x$, $1-\alpha = \pi(\mu)(1-x) +[1-\pi(\mu)]$ y se tendrá entonces por la concavidad de u(.) que $u(1-\alpha) > \pi(\mu)u(1-x) - [1-\pi(\mu)]u(1)$, es decir, $S(\gamma) > P(\mu)$.

Si $\alpha > \pi(\mu)x$, el agente puede preferir $S(\gamma)$ ó $P(\mu)$ según su utilidad particular.

Observemos que la condición $\alpha \lesseqgtr \pi(\mu)x$ es equivalente a $D(\mu) = S(\mu)-r(\mu) \lesseqgtr 0$ y por ello, el caso $\alpha = \pi(\mu)x \quad \forall\ \mu$, es el seguro probabilístico general (A_2,γ) del que se habló en la sección 2. $D(\mu) > 0$ es la autoprotección propiamente dicha, y el caso $D(\mu) < 0$ no se considera pues obviamente $S(\gamma) > P(\mu)$ y puede conducir a problemas de riesgo moral.

Para este problema de enfrentar el seguro pleno y la autoprotección, vamos a ver que la actitud frente al éxito/fracaso a través de la utilidad expandida, da condiciones para que los agentes, en particular, los neutrales al riesgo, prefieran una u otra opción.

Consideraremos en primer lugar, que la utilidad básica del agente sobre los resultados ciertos es lineal (neutralidad frente al riesgo).

Para la probabilidad efectiva $\pi(\mu) = r(\mu)\pi$ y para el nivel μ de protección, tenemos:

	s_1 $\pi(\mu)$	s_2 $1-\pi(\mu)$
S	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$
P	$1 - x$	1

Consideraremos nuevamente los casos $\alpha = \pi(\mu)x$ y $\alpha > \pi(\mu)x$

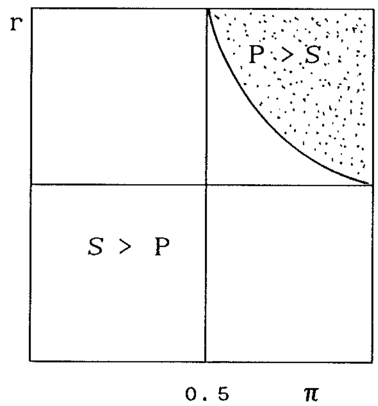
Caso a.- Supongamos que $\alpha = \pi(\mu)x$. En estas condiciones (ver Sirvent y Tomás 1992a), un agente expansor de la utilidad relativa elegirá de modo que:

$S > P \longleftrightarrow \pi(\mu) \leq \frac{1}{2}$ si es temperamental

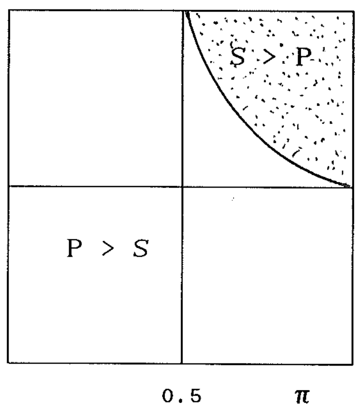
$S \gtrsim P \longleftrightarrow \pi(\mu) \geq \frac{1}{2}$ si es tibio frente al éxito/fracaso

o lo que es lo mismo: $S \gtrsim P \longleftrightarrow r(\mu)\pi \leq \frac{1}{2}$ para temperamentales

$S \gtrsim P \longleftrightarrow r(\mu)\pi \geq \frac{1}{2}$ para agentes tibios como queda reflejado en las figuras 5a y 5b.



temperamentales
fig. 5a



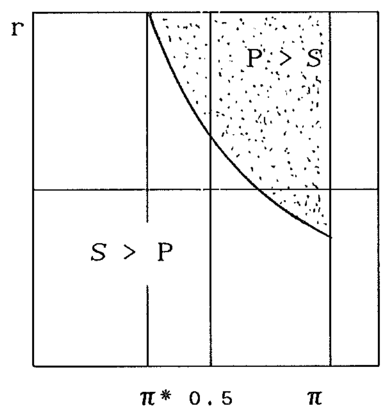
tibios
fig. 5b

Dependiendo de la probabilidad efectiva de pérdida, la actitud temperamental frente al éxito/fracaso da condiciones que son necesarias y suficientes para cada una de las opciones enfrentadas. Además la condición $r(\mu) < 1/2$ resulta suficiente para que los agentes temperamentales prefieran el seguro pleno y los tibios la protección con independencia del valor de π. Del mismo modo, $\pi < 1/2$ determina que los individuos temperamentales o tibios se decidan por S o bien P respectivamente para cualquier $r(\mu)$.

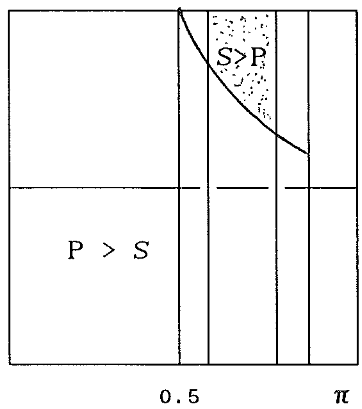
Según los resultados en Sirvent y Tomás (1992a) y bajo las condiciones allí especificadas, la superposición de la aversión al riesgo y la actitud frente al éxito/fracaso determinarán una expansión del espacio de seguro pleno en detrimento de la protección.

Caso b.- Suponemos ahora que $\alpha > \pi(\mu)x$. En estas condiciones podemos hacer $\alpha = (1+k)\pi(\mu)x$ con $k>0$ y el problema se podrá estudiar como un problema de decisión de seguro pleno a prima efectiva con gastos para la probabilidad $\pi(\mu)$ de pérdida.

Nuevamente bajo las condiciones especificadas en nuestro trabajo antes citado, se tendrá una contracción del espacio de seguro. Así, para los agentes temperamentales existe una única $\pi^* < 1/2$ de manera que $\pi(\mu) \leq \pi^* \longleftrightarrow S \succsim P$ (ver fig.6a). Bajo condiciones adecuadas, para los agentes tibios podría tenerse una situación como la que se refleja en la fig.6b.



temperamentales
fig. 6a



tibios
fig. 6b

3.2 Autoseguro.

Supongamos que un agente con riqueza W se enfrenta con probabilidad conocida π $(0<\pi<1)$ al riesgo de sufrir una pérdida x $(0<x\leq W)$ y que invirtiendo μ unidades monetarias ($\mu \leq x$) en protección, el individuo puede reducir la cuantía de la pérdida hasta $x(\mu) = r(\mu)x$ sin influir sobre la probabilidad (autoseguro según Erlich y Becker).

Establecemos los siguientes supuestos sobre $r(\mu)$:

(*i*) $r(0) = 1$ y $r(\mu) > 0$, es decir, el agente es incapaz por sí mismo de eliminar totalmente la pérdida.

(*ii*) $r(\mu)$ de clase C^2. $r'(\mu) < 0$ y $r''(\mu) > 0$.

Se supondrá además que sólo tienen sentido los niveles de protección para los cuales $r'(\mu) \leq -1/x$, lo que significa que un incremento en el gasto de protección debe traducirse en una disminución de al menos igual magnitud en la cuantía de la pérdida, (ver fig. 7).

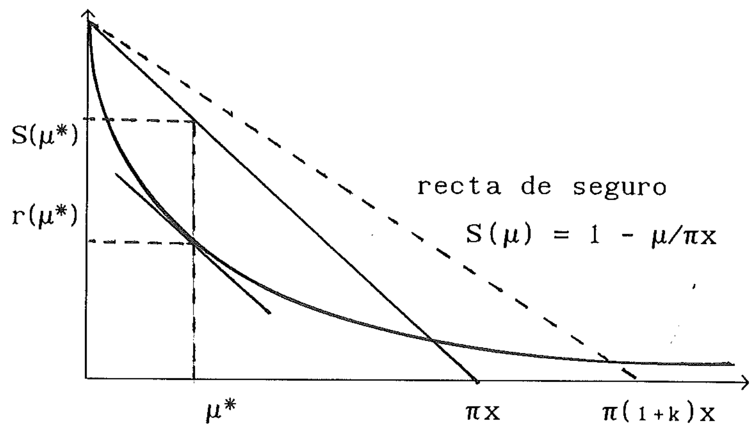


fig. 7

Un análisis clásico del problema, semejante al del epígrafe anterior, conduce a que tanto los agentes neutrales al riesgo como los aversos eligen el nivel óptimo de autoseguro μ^* tal que $r'(\mu^*) = -1/\pi x$. Puede verse también sin dificultad cómo cuando el autoseguro es compatible con el seguro a prima equitativa, los agentes aversos al riesgo diversifican sus gastos en protección asegurando plenamente la pérdida remanente $x(\mu^*) = r(\mu^*)x$, mientras los idividuos neutros son indiferentes ante esta posibilidad.

En este punto es claro que la actitud frente al éxito/fracaso determinará que los agentes temperamentales o tibios diversificarán sus gastos en protección según que la probabilidad de pérdida sea menor o mayor que 1/2 respectivamente, ya que se trata de un problema de decisión de seguro pleno para la pérdida $x(\mu^*)$; también los agentes neutros pueden diversificar sus gastos en protección.

Si la prima de seguro incluye gastos habrá una contracción del espacio de seguro, y la superposición de la aversión al riesgo determinará una expansión de dicho espacio de seguro para todo tipo de agentes.

4.-CONCLUSIONES FINALES.

En este trabajo se ha pretendido, a través del análisis de algunas modalidades de seguro y otras formas de protección frente al riesgo, poner de manifiesto que la consideración de la actitud frente al éxito/fracaso modelizada a través de la Utilidad Expandida, puede dar respuesta satisfactoria a algunas de las dificultades que se constatan en la aplicación de la teoría clásica.

A través del índice temperamental, el modelo predice una mayor proporción de los agentes denominados temperamentales que de los que llamamos tibios. En concreto, los resultados del experimento de Kahneman y Tversky (1979) sobre un caso concreto de seguro probabilístico, vendrían entonces explicados satisfactoriamente por el diferente tipo de respuesta temperamental.

El arrepentimiento/regocijo es una reacción psicológica específicamente binaria que puede surgir en los individuos al enfrentar una pareja de acciones alternativas en condiciones de riesgo. Siendo esto claro, carece de sentido pretender asociarlo a una acción particular a no ser que se considere otra acción standard como punto de referencia alternativo (Léase status quo, expectativas del agente, un determinado resultado cierto...) con lo cual quedaría de hecho definido un problema binario. Hay que insistir pues, en que la respuesta temperamental o tibia que con mayor o menor intensidad reflejará cada individuo en sus elecciones arriesgadas, dependerá de las características del agente y de los resultados concretos a los que se enfrente en cada estado del mundo, no pudiendo por tanto asociarse a la valoración de acciones aisladas.

Así pues, aunque la utilidad expandida no permita, en general, la obtención de niveles óptimos de protección frente al riesgo, la consideración de las actitudes frente al éxito/fracaso hace posible obtener condiciones para la elección entre pares de alternativas de esta clase, que se corresponden con lo generalmente observado. En este sentido, como hemos analizado en la última sección del trabajo, el tener en cuenta estas actitudes, podría explicar el hecho real de que los agentes diversifiquen sus gastos en protección.

R E F E R E N C I A S

Erlich, I. y Becker, G.S. (1972): "Market Insurance, self-insurance and self-protection". *Journal of Political Economy*, 82,(2), pp. 623-48.

Fishburn, P.C. (1984): "Dominance in S.S.B. Utility Theory". *Journal of Economic Theory"*, 34, pp. 130-48.

Fishburn, P.C. (1988): "*Nonlinear Preferences and Utility Theory*". The John Hopkins University Press, Baltimore.

Herrero, C. (1987): "Teorías Alternativas de la Utilidad Esperada: una Interpretación en Términos de Bienestar Social". *Investigaciones Económicas* (2ª época), Vol XI, nº 3, pp. 375-98.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1979): "Prospect Theory: An Analysis of Decisions under Risk". *Econometrica,* 47, (2), pp. 263-91.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1991): "Loss Aversion in Riskless Choice: A Reference-Dependent Model. *Quarterly Journal of Economics*, November, pp. 1039-1061.

Loomes, G.(1987): "Further Evidence of the Impact of Regret and Disappointment in Choice under Uncertainty". *Economica*, 55, pp. 47-62.

Loomes, G., Starmer, C. y Sugden, R. (1989): "Preference Reversal: Information Processing Effect or rational Nontransitive Choice?". *The Economic Journal*, 99 (Conference 1989) pp. 140-151.

Loomes, G., Starmer, C. y Sugden, R. (1991): " Observing Violations of Transitivity by Experimental Methods". *Econometrica*, 59, (2), pp. 425-39.

Loomes, G. y Sugden, R. (1982): "Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty". *The Economic Journal*, 92, pp. 805-24.

Loomes, G., y Sugden, R. (1987): "Some Implications of a more General Form of Regret Theory". *Journal of Economic Theory*, 41, pp. 270-87.

Pratt, J.W. (1964): "Risk Aversion in the small and in the large". *Econometrica*, 32,pp.122-136.

Shefrin, H. y Statman, M. (1990): "Equilibrium Implications of Regret Theory . Applications to Pricing Regulation, Investment Advisors and Money Management". Mimeo, Santa Clara University.

Sirvent, R. y Tomás, J. (1992a): "Una versión de la Teoría del Arrepentimiento: aplicación a la demanda de seguro". *Investigaciones Económicas* (2ª época). Vol. XVI. nº 1, pp. 43-62.

Sirvent, R. y Tomás, J. (1992b): "Una nota sobre Utilidad Expandida: Indice Temperamental Tau". Mimeo, Universidad de Alicante.

Sugden, R. (1987): "New Developments in the Theory of Choice under Uncertainty" en *Surveys in the Economics of Uncertainity*. Hey, J. D. y Lambert, P. J. Eds. Blackwell, Oxford.

DOCUMENTOS PUBLICADOS

WP-EC 90-01	"Los determinantes de la evolución de la productividad en España" M. Mas, F. Pérez. Diciembre 1990.
WP-EC 90-02	"Mecanización y sustitución de factores productivos en la Agricultura Valenciana" A. Picazo, E. Reig. Diciembre 1990.
WP-EC 90-03	"Productivity in the service sector" H. Fest. Diciembre 1990.
WP-EC 90-04	"Aplicación de los modelos de elección discreta al análisis de la adopción de innovaciones tecnológicas. El caso del sector azulejero" E.J. Miravete. Diciembre 1990.
WP-EC 90-05	"Rentabilidad y eficiencia del mercado de acciones español" A. Peiró. Diciembre 1990.
WP-EC 90-06	"La coordinación de políticas fiscales en el marco de una unión económica y monetaria" J.E. Boscá, V. Orts. Diciembre 1990.
WP-EC 91-01	"Medición de la segregación ocupacional en España: 1964-1988" M. Sánchez. Mayo 1991.
WP-EC 91-02	"Capital Adequacy in the New Europe" E.P.M. Gardener. Mayo 1991.
WP-EC 91-03	"Determinantes de la renta de los hogares de la Comunidad Valenciana. Una aproximación empírica." M.L. Molto, C. Peraita, M. Sánchez, E. Uriel. Mayo 1991.
WP-EC 91-04	"Un Modelo para la Determinación de Centros Comerciales en España". A. Peiró, E. Uriel. Septiembre 1991.
WP-EC 91-05	"Exchange Rate Dynamics. Cointegration and Error Correction Mechanism". M.A. Camarero. Septiembre 1991.
WP-EC 91-06	"Aplicación de una Versión Generalizada del Lema de Shephard con Datos de Panel al Sistema Bancario Español". R. Doménech. Septiembre 1991.
WP-EC 91-07	"Necesidades, Dotaciones y Deficits en las Comunidades Autónomas" B. Cabrer, M. Mas, A. Sancho. Diciembre 1991.
WP-EC 91-08	"Un Análisis del Racionamiento de Crédito de Equilibrio" J. Quesada. Diciembre 1991.
WP-EC 91-09	"Cooperación entre Gobiernos para la Recaudación de Impuestos Compartidos" G. Olcina, F. Pérez. Diciembre 1991.
WP-EC 91-10	"El impacto del Cambio Tecnológico en el Sistema Bancario: El Cajero Automático" J. Maudos. Diciembre 1991.

WP-EC 91-11 "El Reparto del Fondo de Compensación Interterritorial entre las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 91-12 "Sobre la Distribución Justa de un Pastel y su Aplicación al Problema de la Financiación de las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 92-01 "Asignaciones Igualitarias y Eficientes en Presencia de Externalidades"
C. Herrero, A. Villar. Abril 1992.

WP-EC 92-02 "Estructura del Consumo Alimentario y Desarrollo Economico"
E. Reig. Abril 1992.

WP-EC 92-03 "Preferencias de Gasto Reveladas por las CC.AA."
M. Mas, F. Pérez. Mayo 1992.

WP-EC 92-04 "Valoración de Títulos con Riesgo: Hacia un Enfoque Alternativo"
R.J. Sirvent, J. Tomás. Junio 1992.

WP-EC 92-05 "Infraestructura y Crecimiento Económico: El Caso de las Comunidades Autónomas"
A. Cutanda, J. Paricio. Junio 1992.

WP-EC 92-06 "Evolución y Estrategia: Teoría de Juegos con Agentes Limitados y un Contexto Cambiante"
F. Vega Redondo. Junio 1992.

WP-EC 92-07 "La Medición del Bienestar mediante Indicadores de 'Renta Real': Caracterización de un Indice de Bienestar Tipo Theil"
J.M. Tomás, A. Villar. Julio 1992.

WP-EC 92-08 "Corresponsabilización Fiscal de Dos Niveles de Gobierno: Relaciones Principal-Agente"
G. Olcina, F. Pérez. Julio 1992.

WP-EC 92-09 "Labour Market and International Migration Flows: The Case of Spain"
P. Antolín. Julio 1992.

WP-EC 92-10 "Un Análisis Microeconométrico de la Demanda de Turismo en España"
J.M. Pérez, A. Sancho. Julio 1992.

WP-EC 92-11 "Solución de Pérdidas Proporcionales para el Problema de Negociación Bipersonal"
M.C. Marco. Noviembre 1992.

WP-EC 92-12 "La Volatilidad del Mercado de Acciones Español"
A. Peiró. Noviembre 1992.

WP-EC 92-13 "Evidencias Empíricas del CAPM en el Mercado Español de Capitales"
A. Gallego, J.C. Gómez, J. Marhuenda. Diciembre 1992.

WP-EC 92-14 "Economic Integration and Monetary Union in Europe or the Importance of Being Earnest: A Target-Zone Approach"
E. Alberola. Diciembre 1992.

WP-EC 92-15 "Utilidad Expandida y Algunas Modalidades de Seguro"
R. Sirvent, J. Tomás. Diciembre 1992.