LA MEDICION DEL BIENESTAR MEDIANTE INDICADORES DE "RENTA REAL": CARACTERIZACION DE UN INDICE DE BIENESTAR TIPO THEIL*

Jose Mª Tomás y Antonio Villar**

WP-EC 92-07

* Este trabajo ha sido financiado por el Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas. Los autores desean agradecer a Luis Corchón, José A. Silva y, especialmente, a Carmen Herrero sus comentarios y sugerencias.

** J.M. Tomás: Universidad de Alicante; A. Villar: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas y Universidad de Alicante.

Editor: **Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.**
Primera Edición Julio 1992.
ISBN: 84-7890-906-0
Depósito Legal: V-2396-1992
Impreso por KEY, S.A., Valencia.
Cardenal Benlloch, 69, 46021-Valencia.
Impreso en España.

LA MEDICION DEL BIENESTAR MEDIANTE INDICADORES DE "RENTA REAL": CARACTERIZACION DE UN INDICE DE BIENESTAR TIPO THEIL

Jose Mª Tomás & Antonio Villar

R E S U M E N

El objeto de este trabajo consiste en la caracterización de una medida de bienestar que depende positivamente del nivel de renta total y negativamente del primer índice de Theil. Esta medida pertenece a una familia de índices de bienestar que se formulan en términos de indicadores de "renta real", expresión que alude al propósito explícito de utilizar medidas de renta como indicadores de bienestar.

A B S T R A C T

The purpose of this paper is to offer a characterization of a welfare index which depends positively on total income and negatively on Theil's first inequality measure. This welfare index belongs to a family of indicators which try to link measures of income and measures of welfare (real-income indices).

1. INTRODUCCION

En el trabajo de Sen (1976) se desarrolla una interesante aproximación al problema de la medición del bienestar a través de indicadores de renta. Para ello, Sen propone la valoración de las asignaciones mediante un sistema de precios sombra que recojan tanto el valor de mercado de los bienes como la valoración social de los individuos. Este procedimiento (conocido como el enfoque de los bienes personalizados, ya que la idea básica consiste en asociar a cada bien un precio sombra que depende tanto del bien en cuestión como del individuo que lo consume) posibilita la introducción de juicios de valor acerca de la distribución de riqueza. El término "renta real" se utiliza para hacer referencia a la medición del bienestar mediante tal sistema de precios sombra [véase Sen (1979) para una discusión más amplia].

Este tipo de formulación conduce a un indicador de renta real que podemos expresar como:

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(y)\, y_i$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ representa un vector de distribución de renta entre m individuos, y α_i es una función de ponderación que refleja la valoración marginal social del individuo i-ésimo en la distribución $\mathbf{y}$ (nótese que si $\alpha_i(y) = 1$ para todo i, entonces $W(y)$ coincide con la renta nacional).

El trabajo original de Sen (1976) únicamente proporciona una ordenación parcial de distribuiciones de renta. Es fácil no obstante extender este resultado a ordenaciones completas, asumiendo que la relación de preferencia social con la que se valoran las asignaciones es homotética [véase Herrero & Villar (1989)]. Ello además garantiza la existencia de una relación biunívoca entre funciones de bienestar social y medidas de igualdad relativa [Blackorby & Donaldson (1978)].

Una de las virtudes esenciales del procedimiento propuesto por Sen es que esta idea abstracta se puede materializar en indicadores concretos que resultan ser funciones crecientes de la renta media y decrecientes de la dispersión de la misma; en particular, la función W puede llegar a expresarse como $W(y) = K\ \mu(y)[1 - \beta I(y)]$, donde K, β son constantes positivas, $\mu(y)$ representa la media de la distribución, e $I(y)$ es alguno de los índices habituales de desigualdad. Ello posibilita el empleo de estos indicadores en el análisis empírico [véase por ejemplo Osmani (1982), Chakravarty & Dutta (1990), Herrero & Villar (1992)].

El propósito preciso de este trabajo es proporcionar un conjunto de requisitos sobre la función W tales que:

a) Representen criterios éticos explícitos con un claro significado económico.

b) Se cumplan si y sólo si $W(y) = m\ \mu(y)\ [1 - \beta T_1(y)]$, siendo $T_1(y)$ el primer índice de desigualdad de Theil.

Ello puede interpretarse como un refinamiento de los resultados presentados en Herrero & Villar (1989), donde se propuso inicialmente un sistema *ad hoc* de ponderaciones α_i que generaba esta forma funcional de W.

El primer índice de desigualdad de Theil es una medida deducida de la noción de entropía de la Teoría de la Información [véase Theil (1967)]. Sea $s > 0$ la probabilidad de que un determinado suceso tenga lugar, y $h(s)$ el contenido informativo de la ocurrencia de dicho suceso, que ha de ser una función decreciente de s (es decir, cuanto menos probable sea el suceso mayor cantidad de información se deriva de conocer que éste ha ocurrido). Una fórmula que satisface dicho principio es:

$$h(s) = \ln \frac{1}{s}$$

Supongamos que existen m posibles sucesos y sus probabilidades respectivas de ocurrencia son $s_1, s_2, \ldots, s_m$ donde $s_i > 0$, $\forall i = 1,\ldots,m$ y $\sum_{i=1}^{m} s_i = 1$. La entropía o contenido informativo esperado de la situación es:

$$H(s) = \sum_{i=1}^{m} s_i\, h(s_i) = \sum_{i=1}^{m} s_i \ln \frac{1}{s_i}$$

Sea $s_i = \frac{y_i}{m\,\mu}$, es decir, s_i representa la participación del individuo i-ésimo en la renta total; entonces $H(s)$ se puede interpretar como una medida de igualdad, ya que H alcanza su valor máximo cuando todas las rentas son iguales (es decir, cuando $s_i = \frac{1}{m}$, $\forall i$, situación en la que H alcanza el valor $\ln m$), y decrece conforme las participaciones se alejan de la media. A partir de esta interpretación, el primer índice de Theil puede definirse como sigue:

$$T_1 = \ell n \ m - H(s) = \sum_{i=1}^{m} s_i \ \ell n \ m \ s_i$$

Dada una distribución **y**, que genera un vector de participaciones $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, T_1 mide la distancia entre entre la igualdad máxima, $\ell n \ m$, y la igualdad existente en la distribución, H(**s**). Por otro lado, como H(**s**) = $\ell n \ m$ si y sólo si $s_i = 1/m$ para todo i, T_1 constituye una medida de la distancia entre participaciones de población y participaciones de renta. Es decir, T_1 puede interpretarse como "la información esperada de un mensaje que transforma proporciones de población en proporciones de renta" [Theil (1967, p. 95)].

La idea de caracterizar un indicador de renta real basado en el primer índice de Theil tiene una doble motivación. En primer lugar, el índice de Theil resulta un índice de desigualdad con muy buenas propiedades tanto éticas como operativas [véase por ejemplo Zubiri (1985), Ruiz Castillo (1986)]. Por otro lado, aun cuando el primer índice de Theil es una medida de desigualdad ya caracterizada [véase Bourguignon (1979), Cowell & Kuga (1981), Foster (1983)], no hay hasta ahora una interpretación adecuada del significado de la función de bienestar social asociada [véase a este respecto lo señalado en Blackorby & Donaldson (1978, Sec. 4)].

Presentamos en la Sección 2 los axiomas que emplearemos en la caracterización de W, y dejamos para la Sección 3 la prueba del resultado. La Sección 4 recoge algunos comentarios finales.

2. LOS AXIOMAS

Denotemos por Y^m el espacio de distribuciones de renta para una población compuesta de m individuos, donde supondremos que m es mayor que dos[1]. Más precisamente, tomaremos Y^m como el interior del ortante positivo de $\mathbb{R}^m$ (es decir, supondremos desde el principio que todos los individuos poseen rentas estrictamente positivas, por pequeñas que éstas sean).

Las siguiente definición, inspirada en el enfoque de los bienes personalizados, delimita el tipo de problema que queremos abordar:

Definición.- Diremos que $W: Y^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es un **indicador de renta real** si para cada $\mathbf{y} \in Y^m$, W es una función de la forma:

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(y)\, y_i$$

Así pues definimos un indicador de renta real como una función que asocia a cada vector de rentas, la suma ponderada de las mismas (donde las ponderaciones son a su vez funciones de la renta). Puede comprobarse que tal indicador corresponde a una forma de valorar las asignaciones de bienes mediante una relación de preferencia social reflexiva, transitiva,

---

1 Tomamos $m > 2$ al objeto de evitar inconsistencias al tomar derivadas parciales respecto de las rentas individuales, sin que la media de la distribución se altere.

completa, homotética y respetuosa con las preferencias individuales [véase Sen (1976), Herrero & Villar (1989)].

Observación.- Adviértase que, por su propia naturaleza, un indicador de renta real resulta dependiente de las unidades de medida de la renta. En lo que sigue supondremos que estas unidades están dadas y no cambian.

Consideremos ahora un primer conjunto de supuestos acerca del sistema de ponderación que, además de algunos requisitos de naturaleza más técnica, recogen un juicio de valor esencial en nuestra concepción de la dependencia entre renta y bienestar:

Axioma 1. (DIFERENCIABILIDAD)

$\alpha_i(y) \in C^1$ sobre Y^m, , para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

Axioma 2. (EQUIDAD MINIMA NORMALIZADA)

2.1.- Para todo $y \in Y^m$ dado, $y_i < y_j \implies \alpha_i(y) > \alpha_j(y)$.

2.2.- (i) Si $y_i = \mu \;\; \forall\, i$, entonces $\alpha_i(y) = 1$.

(ii) $\lim\limits_{y_i \to m\mu} \alpha_i(y) = 0$

Axioma 3. (INDEPENDENCIA)

$\alpha_i(y) = \alpha_i(y_i;\, \mu)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

El Axioma 1 es de naturaleza instrumental. Fundamentalmente significa que pequeños cambios en las rentas generan pequeños cambios en la ponderación.

El Axioma 2 está compuesto por dos partes diferentes. La primera de ellas (2.1), corresponde al Axioma de Equidad Mínima [propuesto inicialmente en Sen (1973, p. 18)], e introduce un elemento valorativo fundamental: vamos a dar mayor peso en el bienestar colectivo a aquellos individuos con rentas más bajas. La segunda parte del Axioma 2 se refiere a la normalización de los α_i mediante la fijación de una escala. El punto (i) nos dice que cuando la renta está igualmente distribuída entonces podemos tomar la renta nacional como una adecuada medida de bienestar. El punto (ii) establece que daremos valor cero al coeficiente de aquel individuo que posea toda la renta.

El Axioma 3 nos dice que la importancia de un individuo en el cómputo del bienestar sólo depende de su propia renta y de la renta media (este Axioma puede interpretarse como un requisito de eficiencia informacional). Es inmediato comprobar que el Axioma 3 implica el cumplimiento del principio de réplicas de población (principio que establece que la unión de un número arbitrario de poblaciones idénticas no altera el bienestar per cápita).

Los siguientes resultados nos dan características operativas interesantes de los ponderadores α_i:

Proposición 1.- Bajo los Axiomas 1, 2.1 y 3, $y_i = y_j \implies \alpha_i(y) = \alpha_j(y)$.

Demostración.-

Por el Axioma 3, podemos escribir $\alpha_i(y) = \alpha_i(y_i;\mu)$.

Sea $F(y_i,y_j) = \alpha_i(y_i;\mu) - \alpha_j(y_j;\mu)$. Fijando la variable $\bar{y}_j$, definimos la siguiente función:

$$h(y_i) = F(y_i,\bar{y}_j)$$

Consideremos ahora la función h en el intervalo cerrado:

$$[\bar{y}_j - \varepsilon;\ \bar{y}_j + \varepsilon]$$

El valor de h los extremos de dicho intervalo viene dado por:

$$h(\bar{y}_j - \varepsilon) = F(\bar{y}_j - \varepsilon;\ \bar{y}_j) = \alpha_i(\bar{y}_j - \varepsilon;\mu) - \alpha_j(\bar{y}_j;\mu) > 0 \quad \text{[por (A.2.1)]}$$

$$h(\bar{y}_j + \varepsilon) = F(\bar{y}_j + \varepsilon;\ \bar{y}_j) = \alpha_i(\bar{y}_j + \varepsilon;\mu) - \alpha_j(\bar{y}_j;\mu) < 0 \quad \text{[por (A.2.1)]}$$

Aplicando el Teorema de Bolzano: $\exists\ y'_j \in [\bar{y}_j - \varepsilon; \bar{y}_j + \varepsilon]$ tal que $h(y'_j) = 0$. Si $y'_j < \bar{y}_j$, se contradice el Axioma 2. Lo mismo ocurre con $y'_j > \bar{y}_j$. De esta forma, la única alternativa posible es que $y'_j = \bar{y}_j$.

Por tanto se puede concluir que $\alpha_i(y'_j;\mu) = \alpha_j(\bar{y}_j;\mu)$ por ser $h(y'_j) = 0$, $\forall \bar{y}_j$. Por hipótesis, si $\bar{y}_j = \bar{y}_i$, entonces $\alpha_i(\bar{y}_i;\mu) = \alpha_j(\bar{y}_j;\mu)$ para todo $\bar{y}_j$.

■

Así pues, cuando se verifican los tres primeros Axiomas se cumple el <u>Principio de Anonimidad</u>: La diferencia entre los distintos individuos es debida, únicamente, a su nivel de renta.

Proposición 2.- Bajo el Axioma 3, α_i es decreciente en y_i si y sólo si se verifica el Axioma de Equidad Mínima 2.1.

<u>Demostración.-</u>

($\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha_i(y_i;\mu)$ es decreciente en y_i. Esto significa que si $y_i < y_j$, entonces $\alpha_i(y) = \alpha_i(y_i;\mu) > \alpha_j(y_j;\mu) = \alpha_j(y)$, por el Axioma 3. Pero esto quiere decir que se cumple el Axioma de Equidad Mínima.

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumple el Axioma de Equidad Mínima: si $y_i < y_j$ entonces $\alpha_i(y) > \alpha_j(y)$, con $y \in Y^m$. Por el Axioma 3, $\alpha_i(y_i;\mu) > \alpha_j(y_j;\mu)$ para cualquier par de niveles de renta, entonces $\alpha_i(y_i;\mu)$ es decreciente en y_i.

$\blacksquare$

El siguiente axioma establece la dependencia de los ponderadores de las rentas relativas:

Axioma 4. (HOMOGENEIDAD)

Para todo escalar $\lambda > 0$, $\alpha_i(\lambda y) = \alpha_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

El Axioma 4 introduce la homogeneidad de grado cero en las funciones α_i. Ello equivale a suponer que cambios proporcionales en el vector de rentas no alteran los pesos de los individuos (se trata por tanto de pesos que varían con la renta relativa de los individuos). Una consecuencia importante del Axioma 4 es que $W(\lambda y) = \lambda W(y)$ (es decir, W es una función homogénea de grado 1). Así pues, *la homogeneidad de grado cero en los coeficientes* α_i *junto con la forma funcional de los indicadores de renta real implican que, cuando cambia la media sin variar la distribución, el índice W debe cambiar en la misma proporción.*

El último elemento que falta para cerrar nuestra modelización es el establecimiento de algún supuesto acerca del cambio que experimentan los pesos de los individuos cuando cambian sus rentas. Es aquí donde se ha de establecer el *grado de progresividad* de nuestro sistema de evaluación. El Axioma de Equidad Mínima nos dice que mayores rentas tienen asociados menores valores de α_i, pero no nos dice nada acerca de cómo cambia α_i al variar y_i ó μ.

Con respecto a cambios en y_i, un individuo podría perder peso en la función W conforme crece su renta a una tasa creciente, constante o decreciente. En el primer caso nos encontraríamos con que el indicador de renta real resultaría más sensible a cambios en las rentas de los más ricos, mientras que en el último resultaría más sensible para cambios de renta en los niveles inferiores.

Nosotros optaremos por dar mayor peso al cambio en las rentas inferiores, lo que supone una aplicación del mismo principio que informa el Axioma de Equidad Mínima al caso de los cambios en α_i con respecto a y_i, es decir:

$$y_i < y_j \implies \left| \frac{\Delta\alpha_i}{\Delta y_i} \right| > \left| \frac{\Delta\alpha_j}{\Delta y_j} \right|$$

(donde $|.|$ denota valor absoluto).

Con respecto al efecto sobre α_i de cambios en la media, adoptaremos un tratamiento simétrico de los individuos (lo que equivale a una aplicación del principio de anonomidad a este contexto):

$$\frac{\Delta\alpha_i}{\Delta\mu} = \frac{\Delta\alpha_j}{\Delta\mu} \quad , \ \forall \ i, \ j$$

Obsérvese que esto implica que al variar la media, la *importancia relativa* del i-ésimo individuo aumenta más cuanto menor sea la renta. Por otro lado, a la vista de la Proposición 1, es obvio que los Axiomas anteriores implican el cumplimiento de esta propiedad de simetría.

Denominemos

$$\varepsilon(\alpha_i, y_i) \equiv \frac{\partial\alpha_i}{\partial y_i} \ \frac{y_i}{\alpha_i}$$

$$\varepsilon(\alpha_i, \mu) \equiv \frac{\partial\alpha_i}{\partial\mu} \ \frac{\mu}{\alpha_i}$$

a las elasticidades de α_i con respecto a y_i, y con respecto a μ, y consideremos el siguiente Axioma, que recoge los principios que acabamos de enunciar:

Axioma 5. (PROGRESIVIDAD)

$$\varepsilon(\alpha_i, y_i) = - \varepsilon(\alpha_i, \mu) = \frac{b}{\alpha_i}$$

(donde b es una cierta constante).

El Axioma 5 establece que las elasticidades de α_i con respecto a y_i y a μ, respectivamente, son inversamente proporcionales al valor de α_i, y de signo opuesto. Para entender la implicación del Axioma de Progresividad, dentro de los sistemas de ponderación que satisfacen el Axioma 2 (que implica que $b < 0$), observemos que:

a) Si la renta media sube mientras la renta del individuo i-ésimo permanece constante, entonces su ponderación experimenta un crecimiento inversamente proporcional a la media, $\partial\alpha_i/\partial\mu = - b/\mu$, con independencia de cuál sea su renta. Ello implica que la variación en α_i será menor cuanto mayor sea la media, pero también que la importancia relativa del i-ésimo individuo aumenta más cuanto menor sea la renta.

b) Por el contrario, si sube la renta del individuo i-ésimo sin cambiar la la media, entonces su ponderación sufre una reducción inversamente proporcional a su renta inicial ($\partial\alpha_i/\partial y_i = b/y_i$), de modo que cuanto mayor sea su renta inicial la variación en α_i será menor (en valor absoluto).

Los 5 Axiomas establecidos (Diferenciabilidad, Equidad Mínima Normalizada, Independencia, Homogeneidad y Progresividad) constituyen elementos suficientes para determinar una forma funcional precisa de los indicadores de renta real. La siguiente Sección se dedica a probar este resultado.

3. LA CARACTERIZACION

El resultado principal de este trabajo se resume en el siguiente Teorema:

TEOREMA.- Un indicador de renta real $W: \mathcal{Y}^m \dashrightarrow \mathbb{R}$ verifica los Axiomas de Diferenciabilidad, Equidad Mínima Normalizada, Independencia, Homogeneidad y Progresividad, si y sólo si:

$$W(y) = m\ \mu(y) \left[1 - \frac{1}{\ell n\ m}\ T_1(y)\right]$$

(donde T_1 representa el primer índice de Theil).

<u>Demostración.-</u>

Desarrollaremos la prueba en tres pasos.

(i) El Axioma 4 nos permiten definir una función auxiliar, γ, como sigue: Tomemos $\lambda = 1/\mu > 0$, entonces,

$$\alpha_i(y) = \alpha_i\left(\frac{1}{\mu}\ y\right) = \gamma_i(x)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, siendo $x_i = y_i/\mu$ (x_i representa pues la participación del individuo i en la renta media). A la vista de las Proposiciones 1 y 2, resulta entonces inmediato comprobar que los Axiomas 1 - 5 resultan equivalentes a las siguientes propiedades:

1*.- $\alpha_i(y) = \gamma(x_i)$, $\forall i = 1,\dots,m$.

2*.- $\gamma(x_i) \in C^1$ en el interior de $\mathbb{R}_+$.

3*.- $\gamma(x_i)$ es estrictamente decreciente en x_i, con $\gamma(1) = 1$.

4*.- $\dfrac{d\gamma(x_i)}{d\,x_i} = b/x_i$, donde b es una constante.

(ii) Comprobaremos primero que un indicador normalizado de renta real verifica las propiedades (1*)-(4*) si y sólo si:

$$\gamma(x_i) = 1 - \beta\,\ell n\, x_i$$

donde β es una constante positiva.

Resulta inmediato comprobar que si $\gamma(x_i) = 1 - \beta\,\ell n\, x_i$, entonces las propiedades 1* a 4* se verifican. Para comprobar la implicación inversa, observemos que resolviendo la ecuación diferencial $\dfrac{d\gamma(x_i)}{dx_i} = \dfrac{b}{x_i}$, tenemos que:

$$d\,\gamma(x_i) = b\,\frac{dx_i}{x_i}$$

De dónde se obtiene que $\gamma(x_i) = b\,\ell n\, x_i + C$.

Por la propiedad 3* sabemos que $\dfrac{d\gamma(x_i)}{d\,x_i} < 0$ y por tanto podemos tomar $b = -\beta$, con $\beta > 0$. Por otro lado, por la propiedad 3* sabemos que $\gamma(1) = 1$, lo que implica que $C = 1$. Consecuentemente:

$$\gamma(x_i) = 1 - \beta\,\ell n\, x_i$$

(iii) De acuerdo con (i) y (ii), los Axiomas 1 - 5 resultan equivalentes a establecer un sistema de ponderaciones dado por:

$$\alpha_i(y) = 1 - \beta\,\ell n\,\frac{y_i}{\mu}$$

En consecuencia:

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \beta \, \ell n \, \frac{y_i}{\mu}\right) y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i - \beta \sum_{i=1}^{m} y_i \, \ell n \, \frac{y_i}{\mu}$$

$$= m\,\mu - \beta \sum_{i=1}^{m} y_i \, \ell n \, \frac{y_i}{\mu} = m\,\mu \left[1 - \frac{\beta}{m\,\mu} \sum_{i=1}^{m} y_i \, \ell n \, \frac{y_i}{\mu}\right] =$$

$$m\,\mu \left[1 - \frac{\beta}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i}{\mu} \, \ell n \, \frac{y_i}{\mu}\right] = m\,\mu \left[1 - \beta \, T_1(y)\right]$$

Finalmente, es fácil ver que exigir el cumplimiento del punto (ii) del Axioma 2.2 equivale a tomar

$$\beta = \frac{1}{\ell n \, m}$$

(puesto que $\ell n(y_i/\mu)$ tiende a $\ell n \, m$, conforme y_i tiende a $m\mu$).

Con ello completamos la demostración.

$\blacksquare$

4. COMENTARIOS FINALES

Hemos presentado en este trabajo un Teorema que caracteriza un indicador de renta real que se formula como una función que depende positivamente de la renta media y negativamente del índice de Theil. Para ello hemos planteado un conjunto de 5 Axiomas con las siguientes propiedades:

a) Resultan intuitivamente comprensibles.

b) Posibilitan una fácil caracterización del indicador de renta real.

c) Contienen un conjunto de juicios de valor que muestran una preocupación explícita por la desigualdad.

Para concluir, y al objeto de resaltar la operatividad de este tipo de indicador, consideraremos brevemente dos cuestiones adicionales: La relación entre W y el índice Atkinson-Kolm-Sen asociado, y el tema de la descomponibilidad del índice W.

Sea $\mathcal{W}:Y^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de bienestar social definida sobre distribuciones de renta. El índice Atkinson-Kolm-Sen (A-K-S, para abreviar) de desigualdad relativa asociado a $\mathcal{W}$ se define a partir de la noción de <u>renta equivalente igualmente distribuída</u>, $\lambda(y)$. Dada una distribución de renta $y \in Y^m$, $\lambda(y)$ es aquel valor real que verifica:

$$\mathcal{W}[\lambda(y)e] = \mathcal{W}(y)$$

donde $\mathbf{e}$ = (1, 1, ..., 1), de modo que $\lambda(y)\mathbf{e}$ representa una distribución perfectamente igualitaria de renta, que proporcionaría el mismo bienestar que $\mathbf{y}$. Es obvio que $\lambda(y) \leq \mu$, para cualquier función W que resulte mínimamente igualitarista (sea cuasi-cóncava y simétrica). El índice A-K-S se define entonces como:

$$I(y) \equiv 1 - \frac{\lambda(y)}{\mu}$$

Es fácil comprobar que $I(y) \equiv \frac{1}{\ell n\ m} T_1(y)$ es el índice A-K-S de desigualdad relativa asociado a la función de bienestar social que satisface los 5 axiomas postulados.

Supongamos ahora que la población de m individuos puede descomponerse en k subgrupos, donde cada subgrupo es no vacío, la intersección entre cualquier par de subgrupos es vacía y la unión de todos es la sociedad total. Supondremos asímismo que la partición de la sociedad en estos k grupos se efectúa por algún criterio no correlacionado con la renta (por ejemplo, este división puede corresponder a la división de un Estado en Comunidades Autónomas). Se obtiene entonces:

Corolario.- Sea una sociedad dividida en k subgrupos, con poblaciones respectivas m_1, m_2, ..., m_k. Bajo los Axiomas 1 - 5 se verifica:

$$W(y) = \sum_{h=1}^{k} m_h\, \mu_h \left(1 - \frac{1}{\ln m}\, T_h^1 - \frac{1}{\ln m}\, \ln \frac{\mu_h}{\mu}\right)$$

donde μ_h es la renta media del subgrupo h y T_h^1 es el primer índice de Theil relativo a dicho subgrupo.

[La prueba de este Corolario puede verse en Herrero & Villar (1989, Teorema 4)].

Este resultado nos permite expresar la "renta real" de la sociedad como la suma de las rentas reales de los distintos subgrupos,

$$\sum_{h=1}^{k} m_h \mu_h \left(1 - \frac{1}{\ln m} T_h^0\right)$$

menos un término de descuento que recoge el efecto de la desigualdad entre las distintos grupos

$$\sum_{h=1}^{k} m_h \mu_h \left(\frac{1}{\ln m} \ln \frac{\mu_h}{\mu}\right).$$

La contribución del grupo h-ésimo al bienestar de la sociedad viene dado por:

$$W_T^h(y) = m_h \mu_h \left(1 - \frac{1}{\ln m} T_h - \frac{1}{\ln m} \ln \frac{\mu_h}{\mu}\right)$$

Por tanto, la contribución del subgrupo h al bienestar total depende de su renta nominal, de la desigualdad existente el grupo, y de su nivel de renta con respecto a la población total.

Obsérvese que la descomponibilidad, que es uno de los axiomas básicos en la caracterización convencional del índice de Theil, aparece aquí como una propiedad derivada, debido esencialmente a la forma funcional de los indicadores de renta real.

R E F E R E N C I A S

Blackorby C. & Donaldson, D. (1978), Measures of Relative Equality and their Meaning in Terms of Social Welfare, **Journal of Economic Theory**, vol. 18, pp. 59-80.

Bourguignon, F. (1979), Decomposable Income Inequality Measures, **Econometrica**, vol. 47, pp. 901-920.

Chakravarty, S.R. & Dutta, B. (1990), Migration and Welfare, **European Journal of Political Economy**, vol. 6, pp. 119-138.

Cowell, F.A. & Kuga, K. (1981), Additivity and the Entropy Concept: An Axiomatic Approach to Inequality Measurement, **Journal of Economic Theory**, vol. 25. pp. 131-143.

Foster, J.E. (1983), An Axiomatic Characterization of the Theil Measure of Income Inequality, **Journal of Economic Theory**, vol. 31, pp. 105-121.

Herrero, C. & Villar, A. (1989), Comparaciones de Renta Real y Evaluación del Bienestar, **Revista de Economía Pública**, vol. 2, pp. 79-101.

Herrero, C. & Villar, A. (1992), La Distribución del Fondo de Compensación Interterritorial entre las Comunidades Autónomas, **Revista de Economía Pública**, en prensa.

Osmani, S.R. (1982). **Economic Inequality and Group Welfare**, Oxford, Clarendon Press.

Ruiz Castillo, J. (1986), Problemas Conceptuales en la Medición de la Desigualdad, **Hacienda Pública Española**, n° 96, pp. 17-31.

Sen, A. (1973), **On Economic Inequality**, Oxford, Oxford University Press.

Sen, A. (1976), Real National Income, **Review of Economic Studies**, vol. 43, pp. 19-39.

Sen, A. (1979), The Welfare Basis of Real Income Comparisons: A Survey, **Journal of Economic Literature**, vol. 17, pp. 1-45.

Theil, H. (1967), **Economics and Information Theory.** Amsterdan, North-Holland.

Zubiri, I. (1985), Una Introducción al Problema de la Medición de la Desigualdad, **Hacienda Pública Española**, nº 95, pp. 291-317.

DOCUMENTOS PUBLICADOS

WP-EC 90-01 "Los determinantes de la evolución de la productividad en España"
M. Mas, F. Pérez. Diciembre 1990.

WP-EC 90-02 "Mecanización y sustitución de factores productivos en la Agricultura Valenciana"
A. Picazo, E. Reig. Diciembre 1990.

WP-EC 90-03 "Productivity in the service sector"
H. Fest. Diciembre 1990.

WP-EC 90-04 "Aplicación de los modelos de elección discreta al análisis de la adopción de innovaciones tecnológicas. El caso del sector azulejero"
E.J. Miravete. Diciembre 1990.

WP-EC 90-05 "Rentabilidad y eficiencia del mercado de acciones español"
A. Peiró. Diciembre 1990.

WP-EC 90-06 "La coordinación de políticas fiscales en el marco de una unión económica y monetaria"
J.E. Boscá, V. Orts. Diciembre 1990.

WP-EC 91-01 "Medición de la segregación ocupacional en España: 1964-1988"
M. Sánchez. Mayo 1991.

WP-EC 91-02 "Capital Adequacy in the New Europe"
E.P.M. Gardener. Mayo 1991.

WP-EC 91-03 "Determinantes de la renta de los hogares de la Comunidad Valenciana. Una aproximación empírica."
M.L. Molto, C. Peraita, M. Sánchez, E. Uriel. Mayo 1991.

WP-EC 91-04 "Un Modelo para la Determinación de Centros Comerciales en España".
A. Peiró, E. Uriel. Septiembre 1991.

WP-EC 91-05 "Exchange Rate Dynamics. Cointegration and Error Correction Mechanism".
M.A. Camarero. Septiembre 1991.

WP-EC 91-06 "Aplicación de una Versión Generalizada del Lema de Shephard con Datos de Panel al Sistema Bancario Español".
R. Domenech. Septiembre 1991.

WP-EC 91-07 "Necesidades, Dotaciones y Deficits en las Comunidades Autónomas"
B. Cabrer, M. Mas, A. Sancho. Diciembre 1991.

WP-EC 91-08 "Un Análisis del Racionamiento de Crédito de Equilibrio"
J. Quesada. Diciembre 1991.

WP-EC 91-09 "Cooperación entre Gobiernos para la Recaudación de Impuestos Compartidos"
G. Olcina, F. Pérez. Diciembre 1991.

WP-EC 91-10 "El impacto del Cambio Tecnológico en el Sistema Bancario: El Cajero Automático"
J. Maudos. Diciembre 1991.

WP-EC 91-11 "El Reparto del Fondo de Compensación Interterritorial entre las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 91-12 "Sobre la Distribución Justa de un Pastel y su Aplicación al Problema de la Financiación de las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 92-01 "Asignaciones Igualitarias y Eficientes en Presencia de Externalidades"
C. Herrero, A. Villar. Abril 1992.

WP-EC 92-02 "Estructura del Consumo Alimentario y Desarrollo Economico"
E. Reig. Abril 1992.

WP-EC 92-03 "Preferencias de Gasto Reveladas por las CC.AA."
M. Mas, F. Pérez. Mayo 1992.

WP-EC 92-04 "Valoración de Títulos con Riesgo: Hacia un Enfoque Alternativo"
R.J. Sirvent, J. Tomás. Junio 1992.

WP-EC 92-05 "Infraestructura y Crecimiento Económico: El Caso de las Comunidades Autónomas"
A. Cutanda, J. Paricio. Junio 1992.

WP-EC 92-06 "Evolución y Estrategia: Teoría de Juegos con Agentes Limitados y un Contexto Cambiante"
F. Vega Redondo. Junio 1992.

WP-EC 92-07 "La Medición del Bienestar mediante Indicadores de 'Renta Real': Caracterización de un Indice de Bienestar Tipo Theil"
J.M. Tomás, A. Villar. Julio 1992.

WP-EC 92-08 "Corresponsabilización Fiscal de Dos Niveles de Gobierno: Relaciones Principal-Agente"
G. Olcina, F. Pérez. Julio 1992.

WP-EC 92-09 "Labour Market and International Migration Flows: The Case of Spain"
P. Antolín. Julio 1992.