EVOLUCION Y ESTRATEGIA: TEORIA DE JUEGOS CON AGENTES LIMITADOS Y UN CONTEXTO CAMBIANTE*

Fernando Vega Redondo**

WP-EC 92-06

* Agradezco a la CICYT, proyectos PB 89-0294 y PS 90-0156, su asistencia durante el desarrollo del presente trabajo.

** Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas y Universidad de Alicante.

Editor: **Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.**
Primera Edición Junio 1992.
ISBN: 84-7890-863-3
Depósito Legal: V-2010-1992
Impreso por KEY, S.A., Valencia.
Cardenal Benlloch, 69, 46021-Valencia.
Impreso en España.

EVOLUCION Y ESTRATEGIA: TEORIA DE JUEGOS CON AGENTES LIMITADOS Y UN CONTEXTO CAMBIANTE

Fernando Vega Redondo

RESUMEN

En este artículo, se pasa revista a los desarrollos fundamentales de la Teoría evolutiva de juegos. Comenzamos con los modelos originales básicos, tales como fueron concebidos para su aplicación al análisis de contextos biológicos. Proseguimos con las derivaciones posteriores de este "enfoque biológico" hacia contextos ecoconómicos. Finalizamos con una descripción de las líneas actuales de investigación en este área y sus perspectivas futuras.

ABSTRACT

This paper reviews the basic developments of Evolutionary Game Theory. We start with the original models, as they were conceived for the study of biological contexts. We continue with the subsequent derivations of this biological context towards economic contexts. We end the paper with a decription of the present lines of research in this area and its future perspectives.

1.- INTRODUCCION

La teoría de juegos se ha convertido hoy en día en una herramienta fundamental de análisis económico. En lo que podría denominarse como su vertiente "clásica", se sustenta en los dos siguientes supuestos como pilares básicos:

(i) la racionalidad compartida y sin limitaciones de los agentes;

(ii) la existencia de un contexto de interacción bien definido y esencialmente estático.[(1)]

No debería ser difícil convencer al lector que ninguno de los dos supuestos señalados es muy descriptivo de lo que es una buena parte de la realidad económica. Ello es así, ciertamente, en relación con algunos de sus fenómenos más interesantes: aprendizaje, cambio tecnológico, procesos de crecimiento o formación de instituciones. A pesar de todo, aún quedaría el recurso de intentar defender el enfoque metodológico de la teoría clásica de

---

1 Es importante enfatizar el término "esencialmente". Así, aunque la teoría de juegos contemple agentes que están sujetos a incertidumbre y/o información diferencial, se supone que todo ello está perfectamente definido ex ante en términos probabilísticos. O, aunque el tiempo aparezca de forma explícita y las variables estén adscritas a diferentes instantes temporales, todas las decisiones se pueden concebir cual si fueran tomadas al principio del juego. Por tanto, como si todas las decisiones fueran tomadas de forma esencialmente atemporal: los jugadores nunca se "sorprenden". Al hilo de este último comentario, es útil recordar lo enfatizado por Bergson [1911, p. 361] y que aquí subscribimos sin matices: "El tiempo es innovación o no es nada de nada".

juegos como una forma sistemática de modelar (con la estrategia teórica del "como si")(2) una realidad compleja y cambiante. El problema fundamental (y, a mi entender, irremediable) de este enfoque es que, por su propia naturaleza, hace abstracción de lo que son precisamente los atributos más característicos de los fenómenos que se quieren modelar: su complejidad y permanente variabilidad. Y estos atributos no sólo son de carácter básico para el investigador; también, y muy esencialmente, para los propios agentes cuyo comportamiento se pretende modelar y entender.

Las anteriores consideraciones no han de ser entendidas, ni mucho menos, como una descalificación de la teoría clásica de juegos, tal como se ha ido conformando y aplicando en las últimas décadas. Su contribución al estudio de determinados problemas ha sido sin duda muy importante. Sería además ingenuo no reconocer los problemas de todo tipo a los que se enfrenta una teoría de juegos que pretenda superar las limitaciones impuestas por los dos pilares metodológicos arriba mencionados. Soy de la opinión, sin embargo, que la exploración de nuevas vías metodológicas que permitan superar estas limitaciones representa uno de los programas de investigación teórica más importantes y prioritarios con los que se enfrenta actualmente la profesión.

Como explicaré en este artículo, mi propuesta (y la de algunos otros investigadores, todavía minoritarios) en este sentido se entronca con una

---

2 La defensa quizás más conocida de este enfoque es Friedman [1953].

tradición "filosófica" ya antigua en economía.[3] Concretamente, con aquella que propugna que los fenómenos económicos comparten con los procesos biológicos de tipo evolutivo ciertas analogías (aunque sólo analogías) cuya explotación adecuada puede llegar a ser extremadamente útil.

Estructuro el resto del artículo como sigue. Primeramente, me centraré en los desarrollos de la biología que utilizan a la teoría de juegos como instrumento para el análisis de situaciones de interacción en contextos biológicos. Ello dirigirá nuestros pasos hacia el concepto central de "estrategia evolutivamente estable". Una vez explicada su motivación estática, su relevancia dinámica será discutida en términos de la llamada "dinámica de replicación" (esencialmente, la formalización del proceso darwiniano de selección natural). La ilustración de estos conceptos se llevará a cabo mediante el conocido juego bilateral halcón-paloma - un juego tan querido a los biólogos como el dilema del prisionero lo es a los economistas.

A continuación, desarrollaré las conexiones entre este enfoque "biológico" y su generalización aplicable a contextos económicos y sociales. El contraste se realizará tanto a nivel estático (es decir, en términos de los conceptos de equilibrio utilizados) como dinámico (comparando las implicaciones de los distintos procesos de selección). El resultado final de esta tarea no es muy esperanzador. Pues llegamos a la conclusión de que, en

---

3 Ya Alfred Marshall defendía en sus Principles esta concepción, abogando (es de suponer que por enfatizar la cuestión) por una economía que se considerara como una subdisciplina de la ciencias biológicas.

último término, el enfoque evolutivo descrito, aplicado a contextos económicos y sociales, supone poco más que un mero refinamiento "técnico" de los conceptos tradicionales de la teoría clásica de juegos.

La última parte del artículo describe lo que, en mi opinión, han de ser las características de un enfoque evolutivo con posibilidades e implicaciones sustancialmente diferentes de los modelos tradicionales de teoría de juegos. Telegráficamente, éstas son:

(a) Primero, ha de considerar agentes racionales pero limitados, con posibilidades igualmente limitadas de acción e imitación.
(b) Segundo, ha de enfatizar el papel jugado por las inercias temporales y las "casualidades históricas" como agentes determinantes de los procesos de selección.
(c) Finalmente, ha de contemplar la posibilidad de que los "datos del problema" (en particular, las estrategias disponibles por la población así como la población misma que las adopta) cambien continuamente en respuesta a la evolución seguida del proceso.

Tal como explicaremos, casi todos los desarrollos recientes de esta literatura incorporan alguna versión de (a) como su motivación fundamental. Entre ellos, unos pocos intentan también incorporar (b), e incluso (c), en alguna medida. Finalizaré el artículo con una somera descripción de estos últimos, así como con muy tentativas sugerencias sobre futuras líneas de avance.

2.- MARCO TEORICO BASICO

Por su especial simplicidad, centraremos nuestro análisis durante la mayor parte de este artículo en el siguiente contexto paradigmático.[4] Los individuos de una cierta población infinita (con cardinalidad del continuo) son emparejados aleatoriamente para participar en un cierto juego bilateral. Por simplicidad, supondremos que se trata de un juego simétrico con matriz (cuadrada) de pagos A. Así, el elemento a_{ij} de esta matriz refleja los pagos para el individuo que adopta la estrategia pura s_i cuando su oponente elige s_j, $i,j = 1,2,\ldots,n$. En general, admitiremos la posibilidad de que los individuos adopten estrategias mixtas. En ese caso, el pago esperado de un individuo que juega la estrategia mixta $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) \in \Delta^{n-1}$ frente a otro que adopta σ' viene dado por:[5]

$$\sigma\, A\, \sigma' = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\, (a_i \cdot \sigma'),$$

donde "$\cdot$" denota la operación de producto escalar y "a_i" es la fila i-ésima de la matriz A.

---

4 Contextos más complejos donde la interacción no es bilateral sino multirateral, o incluso donde ésta se desarrolla entre todos los miembros de la población simultáneamente, han sido también abordados por la literatura (Maynard Smith (1982), Crawford (1989)). El caso en que la población es modelada como finita plantea también cuestiones específicas (Riley (1979), Schaffer (1988)). Ninguna de estas complicaciones plantean cuestiones sustanciales.

5 Por simplicidad notacional, obviamos el símbolo de transposición (como por ejemplo, en σ') cuando no hay posibilidad de ambigüedad.

Supóngase que la estrategia (posiblemente mixta) de cada uno de los individuos está dada, y sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Delta^{n-1}$ el vector asociado (unívocamente, por la ley de los grandes números) que indica las frecuencias de cada estrategia <u>pura</u> s_i, $i = 1,2,\ldots,n$, en la población. Al vector x lo llamaremos *estado poblacional*. Dado el estado poblacional, el pago esperado (y medio) del individuo con estrategia σ es:

$$\sigma\ A\ x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ (a_i \cdot x),$$

debido a nuestro supuesto de emparejamiento aleatorio entre los jugadores.

3.- CONTEXTOS BIOLOGICOS: ENFOQUE ESTATICO

El concepto central de equilibrio considerado en esta literatura es el de *estrategia evolutivamente estable* (EEE). Su definición formal es como sigue:

<u>3.1.-</u> <u>Definición</u>: Una estrategia $\sigma \in \Delta^{n-1}$ es *evolutivamente estable* si $\forall \sigma' \neq \sigma$, $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $\sigma\ A\ [(1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'] > \sigma'\ A\ [(1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma']$.

La definición anterior tiene una clara interpretación "biológica". Considérese una población originalmente homogénea que está adoptando una estrategia común σ (a una población así se le denomina *monomorfa*). Por la ley de los grandes números, el estado poblacional asociado x satisface $x_i = \sigma_i$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$. La pregunta que subyace a la definición 3.1 es la siguiente: ¿Puede la población ser invadida por una pequeña fracción de "mutantes" que adopte otra estrategia $\sigma' \neq \sigma$ e induzca un nuevo estado poblacional $x' = (1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'$? Identificando "capacidad de invasión" con unos mayores pagos relativos (y por tanto, se supone, con una mayor capacidad de superviviencia y reproducción) la estrategia en cuestión se califica como evolutivamente estable si la contestación a la pregunta anterior es negativa.

¿Qué relación hay entre una estrategia evolutivamente estable y los conceptos de equilibrio tradicionales en teoría de juegos? Una primera contestación se deriva de la siguiente inmediata caracterización:

3.2.- Proposición (Maynard Smith, 1982): Una estrategia σ es evolutivamente estable si, y sólo si, satisface las dos siguientes condiciones:

(i) $\sigma A \sigma \geq \sigma' A \sigma, \forall \sigma' \in \Delta^{n-1}$;

(ii) $(\sigma' \in \Delta^{n-1}, \sigma' \neq \sigma, \sigma A \sigma = \sigma' A \sigma) \Longrightarrow \sigma A \sigma' > \sigma' A \sigma'$.

Por la condición (i), si σ es una EEE también es un equilibrio de Nash simétrico del juego bilateral definido por A. El hecho de que también se requiere la condición (ii) indica que, en general, el concepto de EEE es un concepto más fuerte que el de Nash (es decir, utilizando una terminología ya usual, el concepto EEE representa un refinamiento del de Nash).

Veamos la siguiente ilustración, ya clásica, del concepto que acabamos de introducir: el juego del halcón-paloma. Sea una población de "animales" que compiten por un cierto recurso escaso e indivisible (comida, territorio, etc.) en encuentros bilaterales en los que se emparejan aleatoriamente. En cada uno de estos encuentros, cada uno de ellos puede adoptar una de dos acciones (estrategias puras): comportarse agresivamente (estrategia de "halcón" o H) o bien adoptar un comportamiento pacífico (estrategia de "paloma" o P). La matriz de pagos (para el "individuo fila") se considera como sigue:

$$\begin{array}{ccc} & H & P \\ H & \left[\begin{array}{c} \frac{V-C}{2} \\ \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} V \\ \\ \frac{V}{2} \end{array}\right] \\ P & & \end{array}$$

donde V es el valor del recurso y C es el coste de ser vencido en un enfrentamiento. La interpretación de estos pagos es la siguiente. Si los dos animales adoptan H, ambos tienen igual probabilidad de ganar (y obtener un pago de V) o perder (y obtener un pago de - C). Si los dos adoptan P, la probabilidad de obtener el recurso es la misma (1/2) para cada uno de ellos; en cualquier caso, no experimentan ningún coste aún si pierden el recurso. Finalmente, si uno de los animales adopta H mientras que el otro adopta P, el primero obtiene el recurso con probabilidad 1 y ningún coste mientras que el segundo lo pierde con la misma probabilidad y tampoco ningún coste.

Podemos considerar dos casos. El primero, cuando $V \geq C$, es trivial ya que entonces la estrategia H es dominante y por tanto sólo esta estrategia puede ser evolutivamente estable. El caso más interesante ocurre cuando $V < C$. Pues entonces, ninguna estrategia pura puede ser evolutivamente estable (de hecho, ninguna estrategia pura forma parte de un equilibrio simétrico de Nash). En este caso, es fácil ver que la única estrategia de Nash

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (V/C,\ 1-V/C)$$

es evolutivamente estable. Como (σ,σ) es un equilibrio (simétrico) de Nash, σ satisface necesariamente la desigualdad (i) de la Proposición 3.2. Por tanto, será evolutivamente estable si satisface:

$$\sigma\ A\ \sigma' > \sigma'\ A\ \sigma',\ \forall\sigma' \neq \sigma.$$

Es inmediato calcular que:

$$\sigma\ A\ \sigma' - \sigma'\ A\ \sigma' = (V/C - \sigma'_1)\ (V - \sigma'_1\ C) > 0$$

si, y sólo si, $\sigma'_1 \neq \sigma_1 = V/C$. Ello prueba, efectivamente, que σ es evolutivamente estable.

A pesar de su naturaleza intuitiva, el concepto de EEE tiene varios problemas importantes. El primero, muy básico, es su <u>no</u> existencia en contextos nada patológicos. Considérese, por ejemplo, el conocido juego infantil "roca-papel-tijeras". Si asignamos un pago de 1 a ganar, -1 a perder, y cero a empatar, sus pagos vienen dados por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} R & P & T \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ P \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

En el único equilibrio de Nash del juego, cada jugador adopta la estrategia $\sigma = (1/3,1/3,1/3)$. Considérese, por ejemplo, la estrategia alternativa $\sigma' = (1,0,0)$. Por un lado tenemos $\sigma\ A\ \sigma = \sigma'\ A\ \sigma$. Por tanto, si σ ha de ser EEE, por la parte (ii) de la Proposición 3.2 hemos de tener que $\sigma\ A\ \sigma' > \sigma'\ A\ \sigma'$. Mas es fácil ver que la anterior expresión se cumple con igualdad. Ello impide que σ sea EEE.

Un segundo problema del concepto EEE es de tipo más conceptual: no admite, dentro de su motivación dicotómica "estrategia dominante vs. mutación", la modelación de configuraciones polimórficas evolutivamente estables (es decir, situaciones que, a pesar de contar con una población estratégicamente heterógenea, se mantienen inmunes a mutaciones). Todo ello ha llevado a los biológos teóricos a renunciar con frecuencia al análisis estático de la situación a través del concepto de equilibrio de EEE, centrando su atención en una formulación explícitamente dinámica del problema. A ello nos dirigimos en la siguiente sección.

4.- CONTEXTOS BIOLOGICOS: ENFOQUE DINAMICO

Considérese un contexto temporal discreto con períodos $t = 1,2,\ldots$ En cada $t \in \mathbb{N}$, una cierta población interacciona, tal como fue descrito en la sección 2, sobre la base de un juego bilateral simétrico con matriz de pagos A. En contextos biológicos, estos pagos llevan asociados una interpretación muy clara y concreta: cuantifican la capacidad de generar descendientes viables con las mismas características; en nuestro caso, con el mismo comportamiento.

Circunscribamos inicialmente nuestra atención al caso en que los individuos sólo adoptan estrategias puras. Denótese por $x(t) = (x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ el vector de frecuencias sobre estas estrategias prevaleciente en t (es decir, el estado poblacional) y por N(t) la medida (el tamaño) de la población. Para cada estrategia pura s_i hay en t una medida de

$N(t)\ x_i(t) \equiv N_i(t)$ individuos que la adoptan. La identificación de los pagos como "capacidad de reproducción" (número de descendientes viables) determina de forma unívoca la dinámica inducida sobre x(t). Así, para cada estrategia pura s_i, i =1,2,...,n, habrá una medida de

$$N_i(t+1) = N(t)\ x_i(t)\ a_i\ x(t) \tag{1}$$

individuos que la adoptarán en t+1. Por tanto, las frecuencias en t+1 vienen dadas por:

$$x_i(t+1)= \frac{N_i(t+1)}{N(t+1)} = \frac{x_i(t)\ a_i \cdot x(t)}{\sum_{j=1}^{n} x_j(t)\ a_j\ x(t)} \tag{2}$$

o, equivalentemente:

$$\frac{\Delta x_i(t)}{x_i(t)} \equiv \frac{x_i(t+1) - x_i(t)}{x_i(t)} = \frac{a_i \cdot x(t) - x(t)\ A\ x(t)}{x(t)\ A\ x(t)}. \tag{3}$$

Es decir, la tasa de cambio de la frecuencia con que se utiliza una cierta estrategia pura s_i coincide con la desviación relativa de su pago con respecto al pago medio. Esta expresión define lo que normalmente se conoce como *dinámica de replicación* (aquí, "replicación" se entiende como reproducción asexual - esto es, unilateral). Ya que el análisis de sistemas dinámicos en tiempo discreto plantea con frecuencia problemas "incómodos" (dependencia, por ejemplo, de unidades o velocidades de ajuste) el análisis de la dinámica de replicación se centra normalmente en su siguiente versión en tiempo continuo:

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = \frac{a_i \cdot x(t) - x(t)\ A\ x(t)}{x(t)\ A\ x(t)}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

de la cual se puede suprimir el denominador (ya que es común para cada i = 1,2,...,n, y, por tanto, sólo afecta a la velocidad de ajuste, no al comportamiento del sistema) y obtener la siguiente simple expresión:

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = a_i \cdot x(t) - x(t)\ A\ x(t). \tag{5}$$

Una forma de reescribir (5) que clarifica bastante su naturaleza es la siguiente:

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} - \frac{\dot{x}_j(t)}{x_j(t)} = a_i \cdot x(t) - a_j \cdot x(t), \tag{6}$$

cuya simple lectura es la siguiente: las diferencias en tasas de variación entre cada par de estrategias coincide con sus diferencias respectivas en los pagos corrientes. Es fácil ver que (5) está bien definida en el interior del simplex Δ^{n-1} (en particular, lo deja invariante). En la frontera de este simplex (cuando al menos una frecuencia es cero), el sistema anterior no está definido. Esto se consigue reescribiendo (5) de la forma siguiente:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)\ (a_i \cdot x(t) - x(t)\ A\ x(t)), \tag{7}$$

que implica, en particular, que sólo aquellas estrategias presentes al inicio del proceso pueden estarlo más adelante (cada frontera del simplex Δ^{n-1} es invariante). Esta es, indudablemente, una característica poco atractiva del proceso. Para remediarla, la alternativa más natural y extendida es suponer que existe una tasa positiva de "mutación" que produce, continua o esporádicamente, "nuevas estrategias". Las conclusiones que ahora pasamos a describir no se ven afectadas sustancialmente por esta complicación.

El principal resultado de la literatura relativa a la dinámica de replicación es el siguiente:

4.1.- Teorema (Hofbauer, Schuster y Sigmund, 1979): Sea $\sigma \in \Delta^{n-1}$ una estrategia evolutivamente estable. El estado $x = \sigma$ es asintóticamente estable en términos de la dinámica de replicación en estrategias puras.

Informalmente, un cierto equilibrio se dice asintóticamente estable si toda trayectoria que comienza suficientemente cerca de este equilibrio converge hacia él. Es un concepto, por tanto, de estabilidad local. La demostración del resultado anterior se basa en la observación de que, si una cierta estrategia σ es evolutivamente estable, la función $\nu:\Delta^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\nu(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{\sigma_i}, \tag{8}$$

es una función local de Liapunov alrededor del punto $x = \sigma$. Es decir, una función cuya derivada temporal $\dot{\nu}(x) > 0$ para todo $x \neq \sigma$ en un entorno de este punto.

El teorema anterior establece una propiedad un tanto sorprendente del concepto EEE. Pues, tal como explicamos en la sección anterior, la motivación dinámica subyacente a una EEE es en términos de un "test" puramente dicotómico: comprobar si una situación originalmente monomórfica supera la amenaza desencadenada por parte de una - y sólo una - mutación. Sin embargo, el teorema 4.1. establece que el estado poblacional asociado a una EEE tiene una estabilidad dinámica polimórfica de naturaleza muy diferente. El contexto, en este caso, es el de la selección natural (esto es, la dinámica de replicación) entre el conjunto completo de estrategias puras. Y la sorprendente conclusión es que un estado polimórfico en estrategias puras donde las frecuencias de cada una de ellas coinciden con los pesos respectivos de una EEE es localmente estable en términos de la dinámica de replicación.

Veamos cómo lo expuesto se aplica al contexto "halcón-paloma" arriba descrito, con C > V. En este caso, la función de Liapunov dada por (8) se particulariza de la siguiente forma:

$$\nu(x) = x_1^{V/C} \, (1-x)^{(1-V/C)}.$$

Y calculando, por comodidad, la derivada temporal de $\ln \nu(x)$, obtenemos:

$$\frac{\dot{\nu}(x(t))}{\nu(x(t))} = \frac{V}{C}\,(1 - x(t))\,(V - C\,x(t)) + (1 - \frac{V}{C})\,x(t)(C\,x(t) - V)$$

$$= \frac{1}{C}\,(V - C\,x(t))^2 ,$$

que es positivo excepto en $x^* = (V/C \;,\; 1 - V/C)$, cuyas frecuencias coinciden con los pesos de la EEE y es a la vez el único máximo de la función $\nu(x)$. Por tanto, podemos concluir que $x(t) \longrightarrow x^*$. En este caso particular, obtenemos de hecho estabilidad global del estado x^*; es decir, convergencia hacia él desde cualesquiera condiciones iniciales en el interior del simplex. (En general, sólo tenemos garantizada, por el Teorema 4.1, la estabilidad local.)

El Teorema 4.1 nos da una nítida condición suficiente de estabilidad polimórfica en estrategias puras. Ello suscita inmediatamente la siguiente pregunta ¿ Es esta condición también necesaria ? O en otras palabras, ¿podemos siempre asociar a todo estado polimórfico localmente estable una correspondiente EEE ? Tal como fué ilustrado por Zeeman (1981) con un ejemplo, la contestación a estas preguntas es en general negativa si nos circunscribimos a la dinámica de replicación en estrategias puras. Es decir, existen casos donde los equilibrios localmente estables de esta dinámica no se pueden asociar a ninguna EEE. Ello sugiere que la relación entre el concepto EEE y la estabilidad del proceso dinámico de selección natural no es tan fuerte como podría pensarse: sólo es aplicable en una dirección, como condición suficiente.

Sin embargo, Hines (1980) ha conseguido probar que la situación ilustrada por Zeeman depende crucialmente de una importante restricción implícita subyacente al marco dinámico contemplado: los individuos sólo "heredan" y adoptan estrategias puras. Este autor generaliza la dinámica de replicación arriba descrita para admitir la posibilidad de que los jugadores adopten cualquier estrategia genuinamente mixta. En este caso, la dinámica de replicación se convierte en un objeto de mucho más difícil análisis ya que opera sobre un espacio infinito-dimensional: el espacio de las medidas de probabilidad sobre Δ^{n-1}, el conjunto de estrategias mixtas. En este contexto, se puede probar que estabilidad dinámica (local) y el concepto EEE son esencialmente equivalentes. Esto es, una cierta distribución de estrategias mixtas es dinámicamente estable si, y sólo si, las frecuencias del estado poblacional que induce coinciden con los pesos especificados por alguna EEE.[6] Como consecuencia de este resultado de equivalencia, el concepto EEE puede concebirse esencialmente como un útil "instrumento" discriminador de estabilidad dinámica. Desde esta perspectiva, y a pesar de que se mantienen sus problemas conceptuales descritos más arriba, la virtualidad teórica del concepto EEE se ve sustancialmente reforzado.

El concepto EEE sigue manteniendo, sin embargo, el ya apuntado problema de su ocasional inexistencia. Y cuando no existe ninguna EEE tampoco existe, por el anterior resultado de equivalencia, ningún equilibrio estable de la dinámica de replicación (sobre el espacio de estrategias mixtas). En estos casos, el análisis del modelo no puede centrarse ya en sus puntos estacionarios, ya que ninguno de ellos es suficientemente sólido (es decir, estable) desde un punto de vista dinámico. Es indispensable entonces el estudio, por sí mismo, del comportamiento dinámico del sistema como un proceso en "perpetuo desequilibrio".

Un estudio muy interesante de la complejidad dinámica (ciclos, caos, etc.) que pueden alcanzar sistemas evolutivos en permanente desequilibrio puede encontrase en el magnífico volumen de Hofbauer y Sigmund (1988). A modo de simple ilustración, centremos nuestra atención en el juego

6 Intuitivamente, lo que ocurre en este caso es que al admitir un abanico mucho más amplio de posibles "mutaciones" (todas las estrategias mixtas) algunos estados que eran estables en términos de la dinámica de replicación en estrategias puras dejan de serlo. Específicamente, estos estados resultan ser aquellos que, como en el ejemplo de Zeeman (1981), no estan asociados a una EEE.

"roca-papel-tijeras" descrito en la sección 3. Como vimos, este juego no tiene ninguna EEE. A pesar de ello, su comportamiento dinámico es particularmente regular. Centrándonos por simplicidad en la dinámica de replicación en estrategias puras, es fácil probar que la familia de curvas en Δ^2 definida por:

$$\{ (x_1,x_2,x_3) \in \Delta^2 : x_1x_2x_3 = K \}$$

forman, para cada $K > 0$, una *constante de movimiento*. Es decir, si denotamos $f(x) = x_1x_2x_3$, se cumple $\dot{f}(x) = 0$. Efectivamente, dada la matriz de pagos descrita en la sección 3, es inmediato calcular:

$$\dot{f}(x(t)) = x_1(t)x_2(t)x_3(t)$$
$$\{ (x_2(t) - x_3(t) - 0) + (x_3(t) - x_1(t) - 0) + (x_1(t) - x_2(t) - 0)\},$$

que es idénticamente igual a cero. Gráficamente, las trayectorias del sistema dinámico son curvas concéntricas alrededor del único punto estacionario del sistema $\tilde{x} = (1/3,1/3,1/3)$. Las condiciones iniciales determinan sobre cuál de ellas se mueve indefinida y cíclicamente el proceso.

5.- EVOLUCION Y ESTRATEGIA EN CONTEXTOS SOCIALES Y ECONOMICOS: UNA PRIMERA APROXIMACION

El marco teórico descrito en las dos secciones precedentes ha sido fundamentalmente desarrollado para su aplicación a contextos biológicos. Con su amplia utilización por la biología teórica moderna (véase el reciente artículo panorámico de Hammerstein y Selten (1992)) se han abierto importantes vías de análisis riguroso de los procesos biológicos de selección natural.

En comparación, el "enfoque biológico" de la teoría de juegos aplicado a la economía y las ciencias sociales ha producido una literatura de mucho menor alcance, tanto en cantidad como relevancia. Esencialmente, su objetivo se ha centrado en la exploración de distintas variantes de la siguiente idea básica: en un contexto donde la la "viabilidad" relativa de los diferentes tipos de comportamiento se asocia a la magnitud de sus pagos respectivos, sólo un comportamiento cooperativo (es decir, eficiente) puede ser evolutivamente estable. Como señalados representantes de esta literatura, podemos citar a Hirshleifer (1978), Güth y Yaari (1989), Fudenberg y Maskin (1990), o Binmore y Samuelson (1991). A modo de ejemplo, presentamos el siguente resultado, que ilustra de forma sencilla la naturaleza de este enfoque.

<u>5.1.</u>- <u>Teorema</u>: Sea un juego bilateral simétrico repetido indefinidamente y (π^*,π^*) el único perfil eficiente de pagos de este juego. Si el tipo de descuento es suficientemente alto (próximo a 1) y las estrategias son de complejidad limitada,[7] toda estrategia evolutivamente estable induce un pago de π^*.

Heurísticamente, el argumento que subyace a este resultado es bastante intuitivo. Supóngase que una población está originalmente constituida por individuos que adoptan una cierta estrategia no "cooperativa" (es decir, ineficiente). Por hipótesis, el pago de estos individuos es menor que π^*,

---

[7] Una estrategia se define de complejidad limitada si puede implementarse a través de un "autómata finito" (es decir, un autómata que utiliza un número finito de estados).

digamos π'. Argumentamos ahora que, en este caso, existe una estrategia alternativa que, si se introduce en la población con frecuencia positiva (digamos ε, arbitrariamente pequeño), obtiene un pago estrictamente mayor.

Considérese una estrategia "mutante" con las siguientes características. Inicialmente, en los primeros períodos, "sondea" si el tipo de estrategia que confronta es como ella misma o no (ello lo puede hacer de forma óptima en un número finito de períodos ya que la complejidad de las estrategias en cuestión es limitada). Una vez confirmado que la estrategia confrontada es del tipo no cooperativo, se comporta como ella de ahí en adelante. Si, por el contrario, la estrategia que confronta es como ella misma (de lo cual existe una probabilidad ε si el emparejamiento en la población es aleatorio), juega de forma cooperativa de forma indefinida. El pago esperado de la estrategia descrita es aproximadamente $\varepsilon\pi^* + (1-\varepsilon)\pi'$, donde ε es la frecuencia con la que se introduce la estrategia "mutante". Por tanto, dado ε, si el tipo de descuento es suficientemente cercano a 1, la estrategia mutante obtiene un pago estrictamente mayor que la no cooperativa. Esta última, por tanto, no es evolutivamente estable.

En mi opinión, el interés de la literatura cuyas líneas generales venimos de ilustrar es más bien limitado. "Encorsetar" el análisis de <u>contextos sociales</u> dentro de un marco tan rígidamente biológico como el asociado al concepto EEE y la dinámica de replicación parece un ejercicio de validez dudosa. Es por ello que buena parte de la investigación en este campo se ha orientado hacia la consideración de marcos de análisis más generales y flexibles. En ellos, el proceso de selección ya no se vincula rígidamente a la capacidad diferencial de cada tipo de comportamiento para producir "descendencia". Es, por el contario, el resultado de un cúmulo de factores (imitación, capacidad de crecimiento, etc) cuyas implicaciones han de formularse de forma más flexible que cuando se trata de procesos de selección natural.

En lo que resta de esta sección, resumimos los rasgos generales de un enfoque evolutivo con estas características. Considérese un contexto temporal continuo donde, para cada $t \geq 0$, se desarrolla una situación de interacción como la descrita en la sección 2. En cada momento del tiempo, el estado poblacional $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ evoluciona de acuerdo con un cierto sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x(t)) \ , \ i=1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

donde $F \equiv (F_i)$ es una función continua que satisface:

(i) $\sum_{i=1}^{n} F_i(\cdot) \equiv 0,$

(ii) $\forall x \in \Delta^{n-1},\ x_i = 0 \Longrightarrow F_i(x) \geq 0.$

Por (i) y (ii), (9) induce un sistema dinámico bien definido sobre el simplex Δ^{n-1} (esto es, deja a este espacio invariante). Dada la matriz de pagos A, diremos que un sistema así es *evolutivo* si satisface también

$$\forall x \in \Delta^{n-1},\ x_i > 0,\ x_j > 0,\ A_i x > A_j x \iff \frac{F_i(x)}{x_i} > \frac{F_j(x)}{x_j}. \tag{10}$$

La condición anterior es la generalización "cualitativa" de la expresión (7) inducida por la dinámica de replicación. Samuelson (1990) la denomina *monotonía*. Nachbar (1990) se refiere a ella como *monotonía relativa*, dejando el término simple de monotonía reservado para lo que se podría denominar como *monotonía absoluta*. Esto es:

$$\forall x \in \Delta^{n-1},\ x_i > 0,\ x_j > 0,\ A_i x > A_j x \iff F_i(x) > F_j(x). \tag{11}$$

Agudizando aún más la "telaraña semántica", Friedman (1991) da a la condición anterior el nombre de *compatibilidad en orden*. Este mismo autor también estudia la siguiente condición, a la que denomina *compatibilidad débil*:

$$\forall x \in \Delta^{n-1},\ x_i > 0,\ x_j > 0, \tag{12}$$

$$(Ax)\cdot F(x) = \sum_{i=}^{n} (A_i x)\ F_i(x) > 0 \quad \textit{si} \quad A_i(x) \neq A_j(x) \text{ para algún } i,j;$$

$$F(x) = (0,\ldots,0) \qquad \textit{si} \quad A_i(x) = A_j(x)\ \forall i,j = 1,2\ldots,n.$$

Es fácil comprobar que la condición anterior es una generalización de (11). Todas las condiciones presentadas en (10)-(12) responden a la misma motivación: generalizar las características <u>cualitativas</u> del proceso de selección natural, tal como aparece reflejado por la dinámica de replicación (5) o (6). Informalmente, lo que se postula es una cierta monotonía (o compatibilidad) entre los pagos respectivos de cada estrategia y la evolución (absoluta o relativa) de su correspondiente frecuencia en la población. Expresar esta idea en términos relativos (tal como en (10), y no como en (11) o (12)) parece lo más natural en muchos contextos (por ejemplo, si concebimos el "trasvase" de una estrategia a otra como resultado de un cierto proceso de imitación gradual). Sin embargo, como veremos, alguno de los resultados disponibles en esta literatura no dependen de la particular especificación de monotonía considerada (relativa, absoluta o compatibilidad débil)

Los resultados fundamentales de esta literatura los podemos dividir en tres grupos, en correlativo orden descendiente de "ambición".

(i) Establecer condiciones bajo las cuales un sistema evolutivo garantiza la estabilidad del proceso.

(ii) Estudiar las características de los estados estables (cuando existan).

(iii) Investigar la evolución del sistema en sendas posiblemente inestables.

Como representante del primer grupo, tenemos:

<u>5.2.</u>- <u>Teorema</u> (Nachbar, 1990): Supóngase que el sistema evolutivo satisface (10) y que el juego con matriz de pagos A es solucionable por dominancia con perfil σ^*.[8] Entonces, $x^* = \sigma^*$ es un estado globalmente estable.[9]

---

8 Un juego es solucionable por dominancia si existe un único perfil estratégico que sobrevive el proceso iterativo de eliminación de estrategias (fuertemente) dominadas.

9 Un cierto equilibrio de un sistema dinámico es globalmente estable si toda trayectoria converge a él desde cualesquiera condiciones iniciales. En nuestro caso, la validez estricta del teorema requiere circunscribirse a condiciones iniciales en el interior del simplex.

La intuición de este resultado es fácil de comprender. Si el sistema es monótono en términos relativos, el proceso evolutivo irá reproduciendo, aunque de forma gradual, la serie de descartes iterativos que subyace al concepto de solucionable por dominancia. Requerir que un juego sea solucionable por dominancia es un requisito demasiado fuerte para que este resultado pueda juzgarse como muy interesante. (Es decir, hay pocos juegos de interés que sean de este tipo.) Este resultado es, sin embargo, el único relevante de convergencia existente por el momento en la literatura.

En el segundo grupo arriba mencionado, tenemos el siguiente resultado

5.3.- Teorema (Nachbar, 1990; Friedman, 1991): Supóngase que el sistema evolutivo satisface (10) y/o (12). Si x^* es un estado poblacional localmente estable,[10] entonces $\sigma^* = x^*$ es un equilibrio de Nash del juego con matriz de pagos A.

El resultado anterior indica que exigir de un perfil estratégico que corresponda a un estado poblacional localmente estable de un sistema evolutivo supone un reforzamiento (esto es, un refinamiento) del concepto de *equilibrio de Nash*. La intuición del anterior resultado es la siguiente. Si un estado poblacional no está asociado a un equilibrio de Nash, jugar alguna de las estrategias puras con frecuencia positiva no puede ser "mejor respuesta"

---

10 Un equilibrio de un sistema dinámico se dice localmente estable si toda trayectoria que empieza en un entorno suficientemente pequeño de este equilibrio converge hacia él

conforme el proceso se acerca a las frecuencias correspondientes a este estado. Por tanto, dada la monotonía del sistema dinámico, el peso de la estrategia pura en cuestión ha de disminuir continuamente en relación con el correspondiente a alguna otra estrategia pura alternativa. Esto último es incompatible con la estabilidad local del estado poblacional considerado.

Una limitación básica del teorema 5.3 es que presupone la estabilidad del estado poblacional considerado. Visto el fuerte requisito contemplado por el teorema 5.2 para garantizar esta estabilidad, parece obligado prestar atención a la posibilidad de que, al menos desde algunas condiciones iniciales, el proceso evolutivo no genere una senda temporal estable. ¿ Es posible establecer alguna conclusión interesante aún en este caso ? Una posible respuesta a esta pregunta está reflejada en el siguiente teorema.

<u>Teorema</u> <u>5.4</u> (Samuelson, 1990): Supóngase que el sistema evolutivo satisface (10), y sea $x: [0,\infty] \longrightarrow \Delta^{n-1}$ una senda del proceso con $x(0) \in \mathrm{int}(\Delta^{n-1})$. Si la estrategia pura s_i <u>no</u> es racionalizable,[11] entonces $x_i(t) \longrightarrow 0$.

En juegos bilaterales, una estrategia es racionalizable si, y sólo si, sobrevive el proceso iterativo de eliminación de estrategias fuertemente

---

[11] Una estrategia es racionalizable si es consistente con el supuesto de que la racionalidad es conocimiento común. O más informalmente, si se puede sustentar ("racionalizar") a través de una cadena indefinida de "mejores respuestas".

dominadas (véase, van Damme (1991)). Por tanto, el teorema anterior puede concebirse como un reforzamiento del Teorema 5.2. (Si un juego es solucionable por dominancia, tiene una única estrategia racionalizable; por el teorema 5.4, toda senda converge hacia ella: la conclusión del Teorema 5.2.)

Si juzgamos el contenido de la presente sección de forma un tanto exigente, el balance no puede ser, en mi opinión, demasiado positivo. La generalización de la dinámica de replicación formalizada por las condiciones (10), (11) o (12) resulta ser demasiado amplia para obtener conclusiones suficientemente concluyentes: ni tenemos una condición suficientemente interesante que garantice estabilidad (Teorema 5.2), ni el supuesto de estabilidad nos da mucho más que un criterio de refinamiento del equilibrio de Nash -otro más a añadir a la abundante literatura en este campo (Teorema 5.3)-, ni el estudio de un sistema evolutivo que obvie el requisito de estabilidad nos lleva más allá de una "predicción" sin casi poder predictivo (Teorema 5.4).[12]

No son obviamente estas pesimistas reflexiones las que nos llevan a proponer el enfoque evolutivo como fructífera alternativa a la teoría clásica de juegos. Como ya hemos avanzado, el marco teórico que propugnamos como genuinamente evolutivo es, en contraste tanto con el arriba descrito como con

---

12 En la mayor parte de los juegos de interés, "casi todo es racionalizable". Ello es así, por ejemplo, en juegos bilaterales donde ningún jugador tiene estrategias fuertemente dominadas (recuérdese el párrafo anterior).

el tradicional de la teoría clásica de juegos, un marco esencialmente dinámico y permanentemente cambiante. En un contexto de este tipo, el espacio de posibles acciones, la población que las adopta, sus percepciones y elecciones cambian continuamente a lo largo de un proceso que, en general, será sustancialmente inercial e impredecible. Algunas de las características de este "marco evolutivo ideal" aparecerán parcialmente reflejadas en el enfoque teórico que describiremos en la siguiente sección.

6.- EVOLUCION Y ESTRATEGIA EN CONTEXTOS SOCIALES Y ECONOMICOS: UN ENTORNO CAMBIANTE

Hasta ahora, el marco teórico analizado ha sido "evolutivo" pero estático. Es decir, los "datos del problema" (las estrategias disponibles, los pagos asociados, la población de jugadores, etc.) están dados. Pero hablando de evolución, parece fundamental admitir la posibilidad de que sea el propio contexto el que cambie a lo largo del proceso y no sólo que este proceso produzca meras reconfiguraciones de un contexto dado.

La consideración de un contexto cambiante es sin duda esencial en contextos biológicos donde el proceso de selección natural produce continuamente nuevas posibilidades como ligeras variaciones sobre lo pre-existente. Es, sin embargo, mucho más fundamental en una gran parte de los fenómenos económicos y sociales de interés (por ejemplo, cambio tecnólogico o aprendizaje) donde el contexto "muta" a mucha mayor velocidad. En estos casos, un marco estático sólo puede concebirse como adecuado para modelar situaciones a muy corto plazo en donde los datos esenciales del problema pueden apropiadamente tomarse como dados.

En esta última sección abordaremos la formalización de procesos de cambio a tres niveles progresivamente más ambiciosos.

Primero, un contexto donde los pagos (o incluso las frecuencias) asociados a las diferentes estrategias (no el espacio de estrategias mismo) está sujeto a pequeñas probabilidades de mutación. Ello hace que la evolución del proceso deje de ser determinista y admita, *ex ante*, diferentes posibles sendas con probabilidad positiva.

Segundo, un contexto donde es la población misma la que está sujeta a variaciones a través de un proceso gradual de renovación poblacional. La perturbación que esto induce en el proceso evolutivo viene dada por el hecho de que cada generación de nuevos individuos se incorpora al proceso con unas percepciones y expectativas posiblemente diferentes del resto de la población.

Finalmente, consideraremos un contexto en donde tanto la población como sus estrategias disponibles cambian a lo largo del tiempo a través de un proceso de "nacimiento" y "muerte" de individuos y estrategias. La finalidad primordial de este enfoque es la de estudiar procesos de innovación y aprendizaje (por ejemplo, el proceso de cambio tecnológico en una cierta industria) que responden tanto a consideraciones estratégicas como de viabilidad e incertidumbre.

Los modelos que presentamos a continuación no se encuadran dentro de un marco común. Aunque inspirados por una motivación similar, sus diferencias formales son reflejo del carácter todavía preliminar de esta literatura.

6.1. Evolución estocástica y "mutaciones"

En un importante artículo reciente, Foster y Young (1990) proponen un marco teórico general en donde se estudia un proceso evolutivo sujeto a pequeñas fluctuaciones estocásticas ("mutaciones"). Específicamente, estos autores estudian el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que resulta de incorporar a la dinámica de replicación descrita en (7) un ruido gaussiano (esto es, una variable aleatoria normal e independientemente distribuida con media cero). La pregunta que se plantea es la siguiente: ¿Cuál es la evolución asintótica del sistema conforme la magnitud del ruido tiende a cero ? O más específicamente, ¿ cuál es el conjunto de estados poblacionales visitados en el largo plazo (quizás cíclica o caóticamente) cuando la varianza del "ruido mutacional" tiende a cero ?

Estos autores prueban que, en general, el conjunto límite resultante puede ser muy diferente del inducido por el sistema determinista. En particular, aquél puede no incluir ninguno de los perfiles asociados a una EEE (compárese con el Teorema 4.1). Como se recordará, la motivación del concepto

EEE se centraba en la situación dimórfica entre una estrategia dominante y una mutación presente en pequeña escala. Lo que el análisis de Foster y Young [1990] ilustra es que, cuando el ruido es continuado y no de una vez por todas, la evolución del sistema (para una probabilidad de mutación pequeña) puede verse sustancialmente afectada.

El trabajo de Foster y Young plantea serias dudas sobre la validez teórica de la hipótesis de "mutación esporádica" subyacente al concepto de EEE. No parece que un modelo que depende crucialmente del supuesto de que todos los efectos inducidos por una mutación se agotan antes de que otra diferente pueda surgir sea muy apropiado para estudiar fenómenos biológicos de selección natural. Ello es, obviamente, aún más problemático si de lo que se trata es de modelar fenómenos de evolución en un marco social o económico.

Como ilustración de lo anterior, es útil discutir un artículo posterior de Young y Foster [1991] en que se aplica el enfoque descrito a un contexto concreto: el dilema del prisionero repetido. Consideran sólo tres posibles estrategias: "coperación indefinida" (C), "delación indefinida" (D) e "imitar la acción anterior del oponente" (T, de "Tit-For-Tat", a veces traducida al castellano como "ojo por ojo"). Aquí, el ruido incorporado al sistema proviene de dos factores actuando conjuntamente. Por un lado, una probabilidad continua de mutación; por otro, la estocasticidad que resulta de una población finita y el supuesto de emparejamiento aleatorio.

En el contexto determinista tradicional, existen dos posibles situaciones estacionarias y estables: toda la población jugando D, o toda la población jugando cualquier combinación indeterminada de C y T. Cuando admitimos la existencia de ruido del tipo descrito, surge una conclusión inicialmente sorprendente: si el ruido se convierte en infinitesimal (esto es, se considera una "pequeña" probabilidad de mutación y/o una población arbitrariamente grande), sólo el primero de los estados es dinámicamente estable. O dicho de otra forma: el sistema "pasa la mayor parte del tiempo" en las cercanías de este estado.

La intuición de este resultado no es díficil de explicar. Dada la existencia de "ruido distorsionador", el sistema alternará con probabilidad 1 entre los dos estados que son atractores del sistema: toda la población en D o toda la población en T.[13] Sin embargo, la transición del segundo al primero es mucho más fácil que viceversa. Para la primera de las transiciones, lo único que tiene que pasar es que en la población se acumulen suficientes C. Ello, en una población dominada por T no es díficil ya que el pago de C y T en estas circunstancias es casi idéntico. Por el contrario, la transición de D a T no puede "explotar" tal vía indirecta: ha de avanzar en una pendiente más pronunciada, sin mayor ayuda que una muy ocasional acumulación de ruido beneficioso.

---

13 Nótese que si hay una pequeña probabilidad de mutación (y, por tanto, siempre hay representantes de todas las estrategias), una población que contiene mayoritariamente tanto C como T convergerá hacia T por el efecto disciplinador que los pocos D que van surgiendo tienen sobre los C.

6.2. Evolución estocástica y renovación poblacional

En un artículo inspirado en el trabajo de Foster y Young, Kandori, Mailath y Rob [1991] explotan ideas similares dentro de un interesante modelo evolutivo de selección de equilibrio. Las características esenciales de su enfoque pueden discutirse en el marco del siguiente contexto sencillo. Considérese una cierta población de cardinalidad finita que se empareja aleatoriamente para jugar el juego simétrico de coordinación asociado a la siguiente tabla de pagos:

	A	B
A	1 , 1	0 , 0
B	0 , 0	2 , 2

Figura 1

El juego bilateral asociado a la anterior tabla de pagos tiene dos únicos equilibrios de Nash, ambos estrictos (superan, por tanto, cualquier criterio propuesto en la literatura de refinamiento del equilibrio de Nash).[14] Uno de ellos, sin embargo, domina en sentido de Pareto al otro y es, por tanto, el único eficiente.

Denótese por $\mu(t)$ la frecuencia de individuos que juegan A en el período $t = 1,2,\ldots$ La población se va renovando gradual y estocásticamente en cada

14 Véase, por ejemplo, Vega-Redondo [1989].

período. Podemos suponer, por ejemplo, que cada individuo tiene una cierta probabilidad independiente (digamos ε) de no sobrevivir hasta el período siguiente. Si sobrevive, cambia su acción con una cierta probabilidad si, y sólo si, la acción que adoptó el período anterior reportó a la población un pago medio (coincidente con el esperado)[15] menor que la acción alternativa. Si, por el contrario, el individuo en cuestión no sobrevive, suponemos que es reemplazado por otro nuevo que adopta la acción A o B de forma aleatoria con igual probabilidad.[16]

La pregunta que ahora se plantea es análoga a la propuesta por Foster y Young [1990,1991]. ¿ Cuál es el comportamiento del sistema cuando el "ruido" (en este caso, la probabilidad de muerte ε) tiende a desaparecer? Estos autores prueban que en el largo plazo, conforme ε tiende a cero, el sistema pasa casi todo el tiempo en el estado poblacional en el que todos los jugadores adoptan B; es decir, en el equilibrio eficiente. Más rigurosamente, la distribución de probabilidad asintótica correspondiente a la cadena de

15 Aquí suponemos implícitamente que el número de emparejamientos aleatorios cada período es muy grande de forma que el pago medio asociado a cada acción coincide con su pago esperado.

16 En el artículo posterior de Matsui y Rob [1991] se reformula el concepto de mutación de la siguiente forma. Por un lado, se supone que los individuos seleccionan su acción de forma inflexible "para toda su vida". Por otro, se postula que cuando un individuo entra en la población por primera vez elige óptimamente su estrategia en función de unas expectativas determinadas sobre la evolución del proceso. La aleatoriedad entra en el modelo al suponerse que cualquier expectativa que es consistente con el modelo tiene probabilidad positiva de ser adoptada.

Markov inducida por el proceso descrito tiene toda su probabilidad concentrada en el estado poblacional mencionado.

La intuición de este resultado es muy similar a la explicada en la subsección precedente: a pesar de que, a lo largo del proceso, se visitarán y revisitarán ambos estados poblacionales homogéneos (todos A o todos B) con probabilidad positiva, la transición del segundo al primero acaba siendo mucho más difícil que la transición recíproca (de un orden de magnitud menor) cuando ε tiende a cero. En general, estos autores prueban que, en cualquier juego bilateral con varios equilibrios, la distribución asintótica está concentrada en el estado poblacional correspondiente al equilibrio que es *dominante en riesgo* en el sentido de Harsanyi y Selten (1988) - en el juego anterior, el equilibrio (B,B).

El enfoque descrito puede suscitar reacciones de los siguientes tipos. Por un lado, puede inducir reticencias con respecto a la mecánica de interacción contemplada. En la mayor parte de las interacciones en la vida real, los "emparejamientos" no se producen a la escala de toda la población. Normalmente, la interacción se segmenta en subgrupos (empresas, familia, clubes de amigos, etc.) de cardinalidad muy inferior a la de la población en su conjunto, dando lugar a un proceso de interacción a varios niveles.

Además de su virtualidad descriptiva, esta cuestión es también relevante en el siguiente sentido. Considérese de nuevo el contexto de interacción arriba descrito donde la cardinalidad de la población es muy grande (esta gran cardinalidad es, de hecho, casi imprescindible para una apropiada motivación del proceso). En ese caso, la probabilidad con la que se producirán transiciones de un estado poblacional a otro puede ser tan pequeña como para hacer dudar de su relevancia para un horizonte temporal apropiado. Este problema no se plantearía si las transiciones entre diferentes estados pudieran consolidarse a través de la acumulación de una serie de transiciones parciales dentro de segmentos suficientemente reducidos de la población que disfrutan de una especial "proximidad".

Finalmente, otra posible cuestión suscitada por el enfoque descrito se centra no ya en su mecanismo de interacción sino en el de renovación poblacional. A este respecto, uno pensaría que esta dimensión del proceso debería vincularse, de forma parecida a como se hace con respecto al cambio de estrategia de un individuo, a la magnitud de los pagos obtenidos (bien los pagos individuales, bien los pagos de los subgrupos de los que se forma parte).

La reciente literatura en este campo empieza ya a avanzar en la línea sugerida por los anteriores comentarios. Así, Boyer y Orlean [1991], Vega-Redondo [1991a] y Samuelson y Shaked [1992] reflejan en sus formulaciones la idea de interacción segmentada. En Vega-Redondo [1991a] también se analizan, en conjunción con lo anterior y dentro de un contexto especialmente sencillo, las implicaciones de vincular la capacidad de supervivencia de los grupos a la magnitud de sus pagos relativos. Finalizamos esta subsección con un breve resumen de este último trabajo.

Considérese una población compuesta por un continuo de agentes que se agrupan aleatoriamente en conjuntos de m individuos para participar en un cierto juego. Para fijar ideas, pensemos en cada uno de estos grupos como "empresas" y denominemos a cada uno de los m jugadores de cada empresa como "trabajadores". El juego en el que participan los trabajadores de cada empresa es el siguiente simple juego de coordinación. Cada uno de los trabajadores puede ser "diligente" (D) o "vago" (V). Esto es, el espacio de acciones es $S_i = \{ D , V \}$, $i = 1,2,\ldots,m$. Si todos los trabajadores son diligentes se producen m unidades de producción, que se dividen igualmente entre ellos. Si, por el contrario, algún trabajador es vago, la empresa no produce nada y, por tanto, ningún trabajador tampoco obtiene nada de output. Supóngase que el coste del esfuerzo si se es diligente es -1/2 para cada trabajador, mientras que ser vago no reporta ningún coste. Para m = 2, tenemos la siguiente tabla de pagos:

	D	V
D	1/2, 1/2	-1/2, 0
V	0, -1/2	0 , 0

<u>Figura 2</u>

El juego descrito tiene dos equilibrios: todos juegan D, o todos juegan V. En este sentido, el juego es similar al representado en la Figura 1. Presenta, sin embargo, dos diferencias fundamentales con áquel. Por un lado, el equilibrio <u>ineficiente</u> es ahora el dominante en riesgo y sería por tanto el seleccionado a largo plazo en el proceso estudiado por Kandori, Mailath y Rob [1991]. Por otro lado, el equilibrio ineficiente es el único que, en <u>términos</u>

relativos, es inmune a una desviación. Dicho de otra forma: si, partiendo del equilibrio (D,D,...,D) un trabajador se desviara, este trabajador sería el que, en términos comparativos con los demás, tendría un pago mayor. Por tanto, si consideramos una empresa en la que coexisten individuos diligentes con vagos, existe una fuerte tendencia a que, mediante un proceso de contagio/imitación de la acción relativamente más beneficiosa, la empresa acabe consistiendo exclusivamente de trabajadores vagos.

En base a las siguientes consideraciones, el proceso evolutivo estudiado se vertebra alrededor de las siguientes tres componentes:

(i) *Contagio/imitación*: cada empresa en la que existe algún vago acabará compuesta exclusivamente por vagos a través de un proceso interno de imitación.

(ii) *Competencia/supervivencia*: Las empresas ineficientes (aquellas cuya producción es cero) tienen una probabilidad q (<1) de quebrar en cada período mayor que la probabilidad correspondiente p (>0) de las empresas eficientes.

(iii) *Cultura/inercia poblacional*: Cuando una empresa quiebra, sus trabajadores son sustituidos por otros nuevos cuyo comportamiento se extrae aleatoriamente de entre D y V con probabilidades iguales a las frecuencias de cada comportamiento en la población en su conjunto.

Las características (i) y (iii) del proceso pueden concebirse como la plasmación dentro del contexto que nos ocupa de las ideas de imitación, gradualidad e inercia subyacentes a todos los modelos evolutivos en contextos sociales. Por su parte, (ii) refleja un proceso de selección canalizado explícitamente a través de un mecanismo sesgado de renovación poblacional.

En Vega-Redondo [1991a] se prueba que la conjunción de todos estos factores determina de forma precisa la evolución de la población hacia alguno de los dos estados poblacionales homogéneos. En particular, dado cualquier estado inicial, la población convergerá en el largo plazo hacia el estado eficiente (aquel en el que toda la población es diligente) si el ratio q/p excede suficientemente a m; es decir, si la "competitividad" del entorno (la "mordiente" de la fuerza de selección) es, en relación con la amplitud de la "esfera de contagio" (el tamaño de la empresa) suficientemente grande. En contraste con esto, si $q/p < m$ la población convergerá hacia el estado ineficiente desde cualesquiera condiciones iniciales. Todo ello ilustra, en un contexto muy estilizado, el *tour de force* entre inercia cultural y supervivencia en el proceso evolutivo que dirige a la población hacia configuraciones polares.

6.3. Un modelo evolutivo para un entorno permanentemente cambiante

Acabo este artículo con una esquemática propuesta de modelización que incorpora, en alguna medida, lo que opino que son las características fundamentales de un enfoque evolutivo al nivel más ambicioso descrito en la introducción de esta sección.

Esencialmente, un proceso evolutivo no es otra cosa que el desarrollo de una dinámica de selección operando sobre un "abanico inagotable" de variabilidad. En contextos sociales y económicos, las fuerzas de selección han de venir canalizadas a través de dos vías fundamentales: (i) decisiones de optimización/imitación adoptadas por los propios agentes; (ii) mecanismos "sesgados" de renovación poblacional. Por su parte, el margen de variabilidad indispensable para el mantenimiento del proceso se sostiene a lo largo de él a través de un flujo permanente de innovaciones producidas por los distintos agentes.

A continuación, abordamos la descripción esquemática de un modelo con estas características. Sus líneas generales se extraen de un reciente trabajo del autor (Vega-Redondo [1991b]) en donde se analiza el proceso de competencia tecnológica desarrollado en una cierta industria desde una perspectiva evolutiva. Su marco teórico se puede descomponer en los siguientes componentes.

(i) Agentes

Consideramos un conjunto $I \subseteq \mathbb{N}$ de jugadores potenciales, posiblemente infinito. El tiempo se mide de forma discreta, $t = 0,1,2,\ldots$ Un cierto subconjunto $S(0) \subseteq I$ incluye aquellos jugadores activos al principio del proceso (en $t = 0$). El conjunto de jugadores activos $S(t)$ en cada $t = 1,2,\ldots,$ evoluciona tal como se describe más adelante.

(ii) Acciones

Sea A el espacio de todas las acciones posibles, que se supone, sin pérdida de generalidad, idéntico para cada jugador. Para cada t y cada $i \in S(t)$, se considera un subconjunto $A_i(t) \subset A$ que incluye todas aquellas acciones disponibles para el jugador i en t. Su ley de movimiento se puede escribir como sigue:

$$A_i(t) = A_i(t-1) \cup N_i(t) \cup M_i(t), \tag{13}$$

en donde $N_i(t)$ incluye las "invenciones" del jugador i en t y $M_i(t)$ engloba a todas aquellas acciones disponibles para este jugador a través de la imitación de los demás. La especificación de estos conjuntos se pospone para más adelante.

(iii) Pagos "instantáneos"

Para cada jugador activo $i \in S(t)$, postulamos una cierta función "instántanea" de pagos

$$\pi_i^t: A^{S(t)} \times A^{S(t)} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que descomponemos en dos partes.

Primero, consideramos un pago bruto, determinado por una cierta función:

$$\psi_i: A^{S(t)} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Segundo, definimos el pago neto que resulta de substraer de cada $\psi_i(\cdot)$ los costes de ajuste o entrada, dependiendo de si el jugador i estaba activo o no en el período precedente.

Si en el período t-1 el jugador i no estaba activo, suponemos que ha de pagar un cierto coste de entrada $\eta \geq 0$, independiente de cuál sea la acción elegida. Si, por el contrario, el jugador i estaba activo en t-1 y cambia su acción de $a_i(t-1)$ a $a_i(t)$, suponemos que incurre en unos costes de ajuste dados por $\gamma(a_i(t),a_i(t-1))$. La función

$$\gamma: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

es la función de <u>costes de ajuste</u>. Supondremos que admite una representación:

$$\gamma(a,a') = \tilde{\gamma}(d(a,a')), \tag{14}$$

donde, para cada $a,a' \in A$, $d(a,a')$ representa una cierta noción de "distancia informacional" entre a y a' (véase más adelante su formalización específica). Naturalmente, supondremos que $\tilde{\gamma}(\cdot)$ es una función estrictamente creciente.

Resumiendo, los pagos netos del jugador $i \in S(t)$ en t bien vienen dados por:

$$\pi_i(\underset{\sim}{a}(t),\underset{\sim}{a}(t-1)) = \psi_i(\underset{\sim}{a}(t)) - \gamma(a_i(t),a_i(t-1)), \tag{15a}$$

si el jugador $i \in S(t-1)$, o bien por:

$$\pi_i(\underset{\sim}{a}(t),\underset{\sim}{a}(t-1)) = \psi_i(\underset{\sim}{a}(t)) - \eta, \tag{15b}$$

si el jugador $i \notin S(t-1)$, donde $\underset{\sim}{a}(t) \in A^{S(t)}$ denota el perfil de acciones prevalecientes en el período t.

<u>(iv) Entrada y salida</u>

Postulamos una regla de salida ("nacimiento y muerte") como sigue:

$$S(t) = [S(t-1) \setminus X(t)] \cup E(t), \quad t = 1,2,\ldots,$$

donde $X(t)$ representa aquellos jugadores en $S(t-1)$ que salen ("mueren") en $t-1$ y $E(t)$ aquellos que entran ("nacen") en t. Primeramente, suponemos que la salida está vinculada a la incapacidad de obtener unos ciertos pagos mínimos pre-establecidos $v \in \mathbb{R}$ (por ejemplo, podemos elegir $v = 0$, con lo que vinculamos la supervivencia a la ausencia de pérdidas). Así, definimos:

$$X(t) = \{ i \in S(t-1) : \pi_i^t(t-1) < v \}, \tag{16}$$

Por su parte, postulamos que la entrada es un proceso gradual. Específicamente, suponemos que los potenciales entrantes están ordenados (por ejemplo, por su índice), pudiendo cada uno de ellos acometer la entrada (sólo uno cada vez) cuando le llega su "turno". Formalmente, si $\mathcal{E}(t)$ denota el conjunto de agentes que han estado activos en algún período anterior a t, definimos:

$$E(t) = \{e(t)\},$$

donde $e(t) = \max \{ i : i \in \mathcal{E}(t)\} + 1$.

(v) Distancia informacional

Como mencionamos más arriba, consideraremos una cierta noción de distancia informacional entre pares de acciones. Para su formalización procedemos como sigue.

Dótese al espacio de acciones con una estructura (A,μ) de grafo dirigido (un conjunto de "puntos" y "flechas" que los unen). La relación μ de precedencia contemplada por el grafo dirigido (es decir, la dirección reflejada por las flechas del grafo) se interpreta como precedencia informacional o tecnológica entre acciones. Informalmente, se define la distancia informacional entre cualquier par de acciones, a y a', como el mínimo número de "saltos informacionales" (flechas) que es necesario asimilar para ir desde algún antecesor de la acción a hacia la acción a'. Interpretaremos, por tanto, cada flecha como un "quanto" informacional que refleja una cierta cantidad homogénea de información.

Supuestos alternativos sobre el grafo (A,μ) indican diferentes estructuras informacionales del espacio de acciones. Ejemplos naturales en este sentido son los siguientes:

(i) (A,μ) está linealmente ordenado;

(ii) (A,μ) es un árbol;

(iii) (A,μ) es un retículo.

<u>(vi) Innovación e imitación</u>

Finalmente, especificamos los conjuntos de innovación e imitacion, $N_i(t)$ y $M_i(t)$, contemplado en la ley de movimiento (13). Para cada agente $i \in S(t-1)$, $N_i(t)$ consiste en una muestra aleatoria (según una distribución de probabilidad dada; por ejemplo, uniforme) entre los inmediatos sucesores informacionales de $a_i(t-1)$ según el grafo (A,μ). Ello refleja la idea de que la innovación es gradual (un "quanto" informacional cada vez). Por su parte, suponemos que $N_i(t) = \emptyset$ si $i \notin S(t-1)$ (es decir, no se produce ninguna innovación si el jugador no ha estado activo en el período anterior).

Por otro lado, definimos:

$$M_i(t) = \bigcup_{j\in\mathcal{E}(t)} A_i(t-s), \tag{17}$$

recordando que $\mathcal{E}(t)$ denota el conjunto de agentes que han estado activos en algún período anterior a t. Es decir, (17) refleja una difusión gradual de las innovaciones generadas por cada agente a todos los demás. El retardo $s \in \mathbb{N}$ con que esta difusión se produce es un parámetro del modelo.

El marco descrito en (i)-(vi) puede servir de base para la especificación de un juego estocástico markoviano. En él los jugadores descuentan pagos futuros a una cierta tasa de descuento $\delta \geq 0$. Para cada jugador i que está activo en t, el pago intertemporal de la continuación vinculado a la cadena de acciones $\underset{\sim}{\mathbf{a}}^t \equiv (\underset{\sim}{a}(t), \underset{\sim}{a}(t+1),\ldots) \in (A^I)^\infty$ viene dado por:

$$\varphi_i(\underset{\sim}{\mathbf{a}}^t) = \sum_{\tau\geq t} \delta^{\tau-t}\ \pi_i(\underset{\sim}{a}(t),\underset{\sim}{a}(t-1)), \tag{18}$$

donde adoptamos la convención de que si $i \notin S(t)$, entonces $a_i(t) = \emptyset$ y su pago instántaneo asociado es cero.

Como hemos avanzado más arriba, en Vega-Redondo (1991b) se utiliza un modelo como el descrito para estudiar el proceso de competencia tecnológica entre las empresas de una cierta industria. El análisis se circunscribe al caso en que los jugadores (las empresas) descuentan totalmente el futuro (esto es, su $\delta = 0$) . Dependiendo de las características exhibidas por la estructura tecnológica de la industria (las propiedades del grafo (A,μ)), así como la cardinalidad del conjunto I (el número de potenciales entrantes), se estudian algunas de las características fundamentales del proceso. Entre ellas, por ejemplo, el grado de renovación poblacional, la heterogeneidad tecnológica y de rentabilidad que se produce a lo largo del proceso, la estructura industrial "límite", etc.

No entraremos en la descripción de estos resultados. Sólo deseo destacar que, en mi opinión, el marco teórico descrito abre amplias posibilidades para el estudio de procesos estratégicos en un contexto permanentemente cambiante. Bajo supuestos apropiados, se puede probar (Mora y Vega-Redondo (1992)) que el proceso estocástico resultante admite una representación a través de una cadena finita de Markov. Ello permite asegurar, por ejemplo, la existencia de una distribución asintótica que resume totalmente la evolución del proceso a largo plazo. El análisis detallado de esta distribución asintótica y su dependencia de los parámetros del modelo desempeñaría aquí un papel análogo al de los usuales ejercicios de "estática comparativa". En este caso, sin embargo, se realizan en términos de un concepto de equilibrio (el de distribución asintótica) al que subyace, en general, una dinámica permanentemente cambiante.

7.- RESUMEN Y CONCLUSIONES

En la presente panorámica, hemos comenzado presentando los primeros desarrollos de la teoría evolutiva de juegos, tal como fue inicialmente concebida como adaptación a contextos biológicos del marco estático de la teoría clásica de juegos. Dadas las limitaciones exhibidas por este enfoque estático para el análisis de procesos evolutivos, también hemos explicado cómo la literatura en este campo se orientó rapidamente hacia la formulación de procesos explícitamente dinámicos.

A continuación, hemos enfatizado las importantes limitaciones del enfoque "biológico" para el estudio de procesos evolutivos en contextos sociales. Una de las características esenciales de estos contextos es la permanente y rápida alteración (a una velocidad mucho mayor que en entornos biológicos) de los propios "datos del problema" (por ejemplo, del conjunto de acciones disponibles o de los sujetos de la población). Ello hace imprescindible una inclusión explícita de estos procesos de cambio dentro del propio marco teórico. Una serie de propuestas en este sentido han cerrado el artículo.

R E F E R E N C I A S

Binmore, K y L. Samuelson (1991): "Evolutionary Stability in Repeated Games Played by Finite Automata", Journal of Economic Theory, en prensa.

Boyer, R. y A. Orlean: "Why are Institutional Transitions So Difficult ? ", mimeo.

Crawford, V.P. (1989): "On the Definition of an Evolutionarily Stable Strategy in the 'Playing the Field' Model", Discussion Paper 89-27, University of California, San Diego.

van Damme, E. (1991): Stability and Perfection of Nash Equilibrium, 2da. edición, Berlin: Springer Verlag.

Foster, D. y P. Young (1990): "Stochastic Evolutionary Game Dynamics", Theoretical Population Biology, 38.

Friedman, M. (1953): Essays in Positive Economics, Chicago: Chicago Univ. Press.

Friedman, D. (1991): "Evolutionary Games in Economics", Econometrica, 59(3), 637-66.

Fudenberg, D. y E. Maskin (1990): "Evolution and Cooperation in Noisy Repeated Games", American Economic Review 80, 274-79.

Güth, W. y M. Yaari (1989): "An Evolutionary Approach to Explain Reciprocal Behavior in Strategic Games", mimeo, 1989.

Hammerstein, P. y R. Selten (1992): "Evolutionary Game Theory", en Handbook of Game Theory, ed. por R. Aumann.

Harsanyi, J.C. y R. Selten (1988): A General Theory of Equilibrium Selection, Cambridge: MIT Press.

Hines, W.G. (1980): "Three Characterizations of Population Strategy Stability", Journal of Applied Probability, 17, 600-10.

Hines, W.G. (1987): "Evolutionary Stable Strategies: A Review of Basic Theory", Theoretical Population Biology, 31, 195-272.

Hirshleifer, J. (1978): "Competition, Cooperation, and Conflict in Economics and Biology", American Economic Review, 68 (2).

Hofbauer, J., P. Schuster y K. Sigmund (1979): "A Note on Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics", Journal of Theoretical Biology, 81, 609-12.

Hofbauer, J. y K. Sigmund (1988): Dynamical Systems and the Theory of Evolution, Cambridge: Cambridge University Press.

Kandori, M., G. Mailath, y R. Rob: "Learning, Mutation, and Long Run Equilibrium in Games", University of Pennsylvania, mimeo.

Maynard Smith, J. (1982): Evolution and the Theory of Games, Cambridge: Cambridge University Press.

Maynard Smith, J. y G.R. Price (1973): "The Logic of Animal Conflict" Nature, 246, 15-21.

Matsui, A. y R. Rob (1991): "Evolution, Rationality and Equilibrium Selection in Societal Games", University of Pennsylvania, mimeo.

Mora, E. y F. Vega-Redondo (1992): "Strategic Processes in an Evolutionary Path-Dependent Context", mimeo, Univ. de Alicante.

Nachbar, J.H.: "Evolutionary Selection Dynamics in Games: Convergence and Limit Properties", International Journal of Game Theory, 19, 59-90.

Pearce, D. (1984): "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection", Econometrica, 52, 1029-50.

Riley, J.G. (1979): "Evolutionary Equilibrium Strategies", Journal of Theoretical Biology, 76, 109-23.

Samuelson, L. y J. Zhang (1990): "Evolutionary Stability in Assymetric Games", SSRI Workshop Series, University of Madison.

Samuelson, L y A. Shaked [1992]: comunicación particular.

Schaffer, M.E. (1988): "Evolutionarily Stable Strategies for a Finite Population and a Variable Contest Size", Journal of Theoretical Biology, 132, 469-78.

Vega-Redondo, F. (1989):"Amenazas Increíbles, Percepciones Insostenibles: Refinamientos del Equilibrio de Nash en Juegos Dinámicos", Cuadernos Económicos de ICE, 40, 41-66.

Vega-Redondo, F. (1991a): "Competition and Culture in the Evolution of Economic Behavior: A Simple Example", A Discusión, WP-AD 91-08, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.

Vega-Redondo, F. (1991b): "Technological Change and Market Structure: An Evolutionary Approach", A Discusión, WP-AD 91-10, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.

Young, P. y D. Foster (1991): "Cooperation in the Short Run and in the Long Run", Games and Economic Behavior, 3.

Zeeman, E.C. (1981): "Dynamics of the Evolution of Animal Conflicts", Journal of Theoretical Biology, 89, 249-70.

DOCUMENTOS PUBLICADOS

WP-EC 90-01 "Los determinantes de la evolución de la productividad en España"
M. Mas, F. Pérez. Diciembre 1990.

WP-EC 90-02 "Mecanización y sustitución de factores productivos en la Agricultura Valenciana"
A. Picazo, E. Reig. Diciembre 1990.

WP-EC 90-03 "Productivity in the service sector"
H. Fest. Diciembre 1990.

WP-EC 90-04 "Aplicación de los modelos de elección discreta al análisis de la adopción de innovaciones tecnológicas. El caso del sector azulejero"
E.J. Miravete. Diciembre 1990.

WP-EC 90-05 "Rentabilidad y eficiencia del mercado de acciones español"
A. Peiró. Diciembre 1990.

WP-EC 90-06 "La coordinación de políticas fiscales en el marco de una unión económica y monetaria"
J.E. Boscá, V. Orts. Diciembre 1990.

WP-EC 91-01 "Medición de la segregación ocupacional en España: 1964-1988"
M. Sánchez. Mayo 1991.

WP-EC 91-02 "Capital Adequacy in the New Europe"
E.P.M. Gardener. Mayo 1991.

WP-EC 91-03 "Determinantes de la renta de los hogares de la Comunidad Valenciana. Una aproximación empírica."
M.L. Molto, C. Peraita, M. Sánchez, E. Uriel. Mayo 1991.

WP-EC 91-04 "Un Modelo para la Determinación de Centros Comerciales en España".
A. Peiró, E. Uriel. Septiembre 1991.

WP-EC 91-05 "Exchange Rate Dynamics. Cointegration and Error Correction Mechanism".
M.A. Camarero. Septiembre 1991.

WP-EC 91-06 "Aplicación de una Versión Generalizada del Lema de Shephard con Datos de Panel al Sistema Bancario Español".
R. Domenech. Septiembre 1991.

WP-EC 91-07 "Necesidades, Dotaciones y Deficits en las Comunidades Autónomas"
B. Cabrer, M. Mas, A. Sancho. Diciembre 1991.

WP-EC 91-08 "Un Análisis del Racionamiento de Crédito de Equilibrio"
J. Quesada. Diciembre 1991.

WP-EC 91-09 "Cooperación entre Gobiernos para la Recaudación de Impuestos Compartidos"
G. Olcina, F. Pérez. Diciembre 1991.

WP-EC 91-10 "El impacto del Cambio Tecnológico en el Sistema Bancario: El Cajero Automático"
J. Maudos. Diciembre 1991.

WP-EC 91-11 "El Reparto del Fondo de Compensación Interterritorial entre las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 91-12 "Sobre la Distribución Justa de un Pastel y su Aplicación al Problema de la Financiación de las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 92-01 "Asignaciones Igualitarias y Eficientes en Presencia de Externalidades"
C. Herrero, A. Villar. Abril 1992.

WP-EC 92-02 "Estructura del Consumo Alimentario y Desarrollo Economico"
E. Reig. Abril 1992.

WP-EC 92-03 "Preferencias de Gasto Reveladas por las CC.AA."
M. Mas, F. Pérez. Mayo 1992.

WP-EC 92-04 "Valoración de Títulos con Riesgo: Hacia un Enfoque Alternativo"
R.J. Sirvent, J. Tomás. Junio 1992.

WP-EC 92-05 "Infraestructura y Crecimiento Económico: El Caso de las Comunidades Autónomas"
A. Cutanda, J. Paricio. Junio 1992.

WP-EC 92-06 "Evolución y Estrategia: Teoría de Juegos con Agentes Limitados y un Contexto Cambiante"
F. Vega Redondo. Junio 1992.