# VALORACION DE TITULOS CON RIESGO: HACIA UN ENFOQUE ALTERNATIVO*

**Ramón J. Sirvent y Josefa Tomás****

WP-EC 92-04

* Agradecemos a Carmen Herrero su colaboración en la elaboración de este trabajo y también las sugerencias de los evaluadores anónimos. Asimismo, agradecemos la financiación del Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas. Este trabajo se ha beneficiado también del proyecto PS89-0066 de la CICYT.

** Universidad de Alicante.

Editor: **Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.**
Primera Edición Junio 1992.
ISBN: 84-7890-854-4
Depósito Legal: V-2009-1992
Impreso por KEY, S.A., Valencia.
Cardenal Benlloch, 69, 46021-Valencia.
Impreso en España.

# VALORACION DE TITULOS CON RIESGO: HACIA UN ENFOQUE ALTERNATIVO

**Ramón J. Sirvent & Josefa Tomás**


## RESUMEN

El objeto de este trabajo es presentar un nuevo enfoque en el análisis del problema de valoración de activos con riesgo y selección de cartera que se aparta del tratamiento tradicional de la Utilidad Esperada de Von Neumann & Morgenstern. Para ello, se ha utilizado la Teoría del Arrepentimiento como caso particular de la SSB con estados, lo que ha permitido obtener algunos nuevos resultados sobre la diversificación.



## ABSTRACT

The purpose of this paper is to introduce a new way of analyzing the portfolio problem by using a different approach of the Von Neumann & Morgenstern utility theory. In so doing, we consider the Regret Theory as a suitable alternative. Some new results on diversification are then obtained.

# 1. INTRODUCCION

La Teoría de la Decisión puede concebirse, genéricamente, como aquella teoría que estudia y analiza la toma de decisiones. En este sentido, se distinguen dos facetas: descriptiva y normativa. Los modelos descriptivos intentan explicar cómo los agentes toman de hecho las decisiones, mientras que los modelos normativos se interesan por la optimalidad, y su función principal consiste en prescribir qué decisión se debería tomar, dados los objetivos del agente y la información disponible.

A pesar de su diferente naturaleza, los enfoques normativo y descriptivo se entremezclan a la hora de analizar problemas reales. Así, en cualquier teoría descriptiva adecuada, existe una componente normativa que refleja el deseo de los individuos de actuar lo mejor posible. Por otra parte, si bien en muchos problemas de decisión la optimalidad está bien definida teóricamente, no es fácil proponer reglas claras que permitan calcular con sencillez la acción óptima. En estos casos, el análisis descriptivo de los objetivos aparece como un requisito previo a la aplicación (y clarificación) del análisis normativo.

El problema genérico de la valoración de activos arriesgados es un tema clásico de la literatura de decisión en condiciones de riesgo, para la cual la Teoría Clásica de la Utilidad Esperada, presentada por Von Neumann y Morgenstern (1944), continúa siendo el paradigma. No obstante, las respuestas de la teoría tradicional a este problema resultan parciales y, en ocasiones, poco satisfactorias. En efecto, la teoría clásica asocia la diversificación entre activos indiferentes a la aversión al riesgo (o concavidad de la función de utilidad) del agente. No hay ninguna explicación entonces al hecho de que agentes neutros, como Bancos, Compañías de Seguros, etc., diversifiquen sus inversiones. Por otro lado, las respuestas positivas al problema de la computación de la cartera óptima quedan reducidas a aquellos casos particulares en que la valoración de las carteras o activos toma sólo en consideración dos parámetros: la media y la varianza.

Recientemente, Shefrin & Statman (1990), analizan el problema de la existencia de los *brokers* en los mercados bursátiles como un mecanismo de delegación en el que la variable que explica dicha delegación no es la aversión al riesgo, sino una componente psicológica que modifica las preferencias del agente y a la que, en la terminología de Loomes & Sugden (1982), denominan *regret* o arrepentimiento. La idea central en la Teoría del Arrepentimiento consiste en que los agentes, al elegir una determinada opción, tienen en cuenta que están de hecho rechazando opciones alternativas. El arrepentimiento/regocijo es, entonces, una modificación de la utilidad que el agente deriva de lo que ha elegido, provocada por el sentimiento de aquello a lo que ha renunciado. Determinadas especificaciones sobre las preferencias pueden llegar a dar formas funcionales específicas al sentimiento de *regret*, construyéndose teorías operativas alternativas a la tradicional que explican determinados fenómenos no previstos por la teoría clásica. En un trabajo reciente [Sirvent & Tomás (1992)], aplicábamos una versión de la Teoría del

Arrepentimiento al problema de la toma de seguros, explicando, mediante el regret, la existencia de reaseguros para agentes neutros al riesgo.

La Teoría del Arrepentimiento, de carácter esencialmente descriptivo, es sustentada normativamente por Fishburn (1984b,c), construyendo un sistema de axiomas para la decisión en un espacio ampliado donde loterías, acciones y sucesos básicos son elementos particulares de los entes que él denomina acciones-loterías. La construcción de este conjunto ampliado permite unificar las diferentes decisiones con que se enfrenta un agente *no tradicional* al elegir entre activos arriesgados. Por otra parte, la operatividad de la regla de elección permite dar algunas respuestas diferentes de las clásicas al problema de decisión en este contexto.

En este trabajo, abordamos el problema de la decisión entre activos arriesgados utilizando la teoría de Fishburn (1984b,c) como vehículo normativo de formalización de la Regret Theory de Loomes & Sugden (1982,1987). La Sección 2 presenta de manera resumida los axiomas y principales resultados de la Teoría de Fishburn. En la Sección 3 abordamos el problema de decisión de un agente cuyas preferencias satisfacen las condiciones previamente estudiadas en el caso de elección entre activos arriesgados. Algunas conclusiones novedosas se derivan del empleo de esta nueva forma de análisis: la diversificación entre activos indiferentes puede explicarse mediante una causa diferente de la aversión al riesgo; es posible "recomendar", en casos de preferencias cíclicas, una cartera que, si bien no tiene garantizada su optimalidad, posee propiedades interesantes y es de cómputo sencillo. Este tipo de conclusiones sugieren que el problema de decisión entre activos financieros puede enriquecerse conceptual y analíticamente mediante el empleo de alguna de estas teorías alternativas. La Sección 4, con comentarios finales, concluye el trabajo. Finalmente, en un Apéndice, se proporciona un ejemplo de cómputo de la cartera recomendada, a modo de ilustración.

## 2.- ACCIONES-LOTERIAS.

Consideremos un agente que se enfrenta a un problema de decisión en condiciones de riesgo. Básicamente, hay dos tipos de formalizaciones tradicionales para enmarcar este problema. El primero considera un conjunto X de resultados posibles, y toma como elementos del conjunto de elección al conjunto P de *loterías sobre* X, siendo $P = \{p:X \longrightarrow [0,1] / \ p$ tiene soporte finito y $\sum p(x) = 1\}$. La segunda formalización parte de un conjunto finito y exhaustivo de estados del mundo $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ de forma que el agente asigna a cada uno de estos estados una determinada probabilidad. Los elementos del conjunto de elección son, entonces, *acciones*. Una acción es una función $A:S \longrightarrow X$, que asocia a cada estado del mundo un resultado. Nos proponemos ahora construir un espacio mayor en el cual acciones, loterías y resultados se obtengan como casos particulares.

Una acción-lotería se define de modo que a cada estado del mundo se hace corresponder un elemento de P $\bar{p} : S \longrightarrow P$.

Si una acción asocia un resultado cierto a cada estado del mundo y una lotería una probabilidad a cada resultado posible, una acción-lotería asigna a cada estado del mundo una distribución de probabilidad de soporte finito sobre el conjunto $X = \{ x_1, \ldots x_i, \ldots x_m, \ldots \}$ de resultados posibles como se detalla en el siguiente diagrama:

| | $s_1$ ....... | $s_j$ ....... | $s_n$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{p}$ | $p_1$ | $p_j$ | $p_n$ |
| | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{1j}$ | $p_{1n}$ |
| . | . . . . | . . . . | . |
| . | | | |
| . | . . . . | . . . . | . |
| . | | | |
| $x_m$ | $p_{m1}$ | $p_{mj}$ | $p_{mn}$ |
| . | | | |
| . | . . . . | . . . . | . |
| | $\sum p_{i1}=1$ | $\sum p_{ij}=1$ | $\sum p_{in}=1$ |

El conjunto de acciones-loterías será entonces:

$$P^n = \{ \bar{p} = (p_1, p_2, \ldots p_n) \ / \ p_j \in P \ \forall \, i \}$$

de manera que $p_j$ es la distribución de probabilidad de los resultados que se asigna al estado $s_j$.

En el conjunto $P^n$ se definen las combinaciones convexas de acciones-loterías de forma natural:

$$\lambda\bar{p} + (1-\lambda)\bar{q} = (\lambda p_1 + (1-\lambda)q_1, \ \ldots \ \lambda p_n + (1-\lambda)q_n)$$

Con ello, $P^n$ es un *mixture set*. Supongamos que el agente tiene definidas sus preferencias sobre $P^n$, verificándose las hipótesis siguientes:

**C (Continuidad):** $\bar{p} > \bar{q}$ , $\bar{q} > \bar{r}$ => $\exists\ \alpha \in (0,1)$ / $\bar{q} \approx \alpha\ \bar{p} + (1-\alpha)\ \bar{r}$.

**D (Dominancia-Convexidad):**

$$\bar{p} > \bar{q},\ \bar{p} \geq \bar{r} \Rightarrow \bar{p} > \alpha\ \bar{q} + (1-\alpha)\ \bar{r},\ \forall\ \alpha \in (0,1)$$

$$\bar{q} > \bar{p},\ \bar{r} \geq \bar{p} \Rightarrow \alpha\ \bar{q} + (1-\alpha)\ \bar{r} > \bar{p},\ \forall\ \alpha \in (0,1)$$

$$\bar{p} \approx \bar{q},\ \bar{p} \approx \bar{r} \Rightarrow \bar{p} \approx \alpha\ \bar{q} + (1-\alpha)\ \bar{r},\ \forall\ \alpha \in (0,1)$$

**S (Simetría):** $\bar{p} > \bar{q}$, $\bar{q} > \bar{r}$, $\bar{p} > \bar{r}$, $\bar{q} \approx (1/2)\ \bar{p} + (1/2)\ \bar{r}$ =>

$$\alpha\ \bar{p} + (1-\alpha)\ \bar{r} \approx (1/2)\ \bar{p} + (1/2)\ \bar{q} \Leftrightarrow \alpha\ \bar{r} + (1-\alpha)\ \bar{p} \approx (1/2)\ \bar{r} + (1/2)\ \bar{q}$$

En este caso [véase Fishburn (1982)], existe una funcional bilineal hemisimétrica $\Phi$: $P^n \times P^n \rightarrow \mathbb{R}$, única salvo multiplicación por un escalar positivo, tal que $\Phi(\bar{p},\bar{q}) \geq 0 \Leftrightarrow \bar{p} \geq \bar{q}$. La valoración relativa de acciones-loterías se resume entonces en el análisis de los valores que toma la funcional $\Phi$. En particular, la funcional $\Phi$ permite comparar *acciones*, ya que éstas son casos particulares de acciones-loterías, para las cuales cada una de las distribuciones $p_1,\ldots,p_n$ son degeneradas (vectores canónicos).

Nótese que, por extensión, podemos considerar $\Phi$ definida sobre $P \times P$, definiendo $\phi(p,q) = \Phi[(p,p,\ldots,p),(q,q,\ldots,q)]$, como el valor que toma $\Phi$ sobre las acciones loterías *constantes* que asocian la lotería p (respectivamente la lotería q), a todos los estados del mundo. De forma análoga, podemos suponer que $\Phi$ está también definida sobre $X \times X$, identificando cada resultado $x \in X$, con la lotería $p_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida de forma que $p_x(x) = 1$, $p_x(y) = 0$, $\forall\ y \neq x$. Así, al disponer de una funcional que valora acciones-loterías, tenemos recogida en ella en particular las valoraciones de acciones, loterías y resultados.

La introducción de supuestos adicionales permite diferentes especificaciones de la forma anterior. Un conjunto de axiomas particular que presentaremos a continuación [véase Fishburn (1984c)], proporciona una regla de valoración operativa.

Dados $p, q \in P$, denotaremos $[p, q]_i$ al elemento de $P^n$ que asocia la lotería q a todos los estados, excepto al estado $s_i$, que le asocia la lotería p. Por otro lado, designaremos por $\bar{p}^n$ a la acción-loteria que asocia la lotería p a todos los estados.

El concepto siguiente se refiere, intuitivamente, a la "probabilidad" que el agente asigna a ciertos estados del mundo:

**Definición. Un estado $s_i$ se dirá nulo si $[p, r]_i \sim [q, r]_i$ $\forall$ p, q, r $\in$ P.**

La idea de estado nulo puede vincularse al concepto de que el agente piensa que *este estado no tiene probabilidad de ocurrir,* por lo que si dos acciones-loterías son idénticas, salvo en la lotería que asignan al estado $s_i$, el agente resulta indiferente entre ambas. Se considera entonces el siguiente conjunto de axiomas:

**F1.-** Al menos hay un estado no nulo.

**F2.-** Si $s_i$ y $s_j$ son estados no nulos, $[p,r]_i > [q, r]_i \Rightarrow [p, r]_j > [q, r]_j$

**F3.-** Si f, g, h, es una permutación cualquiera de $[p, r]_i$, $[q, r]_j$, $\bar{r}^n$, entonces:

$$f \sim \lambda g + (1-\lambda)h \longrightarrow \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} h \sim \frac{1}{2} [\lambda g + (1-\lambda)h] + \frac{1}{2} h$$

El axioma F2, expresa que la relación de preferencias en P, dentro de cada estado (fijada una misma distribución en el resto de los estados), es la misma para cada estado no nulo. Es una forma de decir que los estados no tienen utilidad por sí mismos, sólo tienen posibilidad de ocurrir.

El axioma F3 es una versión restringida del axioma de Herstein y Milnor, que no lo implica, como tampoco implica la transitividad para las acciones-loterias constantes.

Se tiene entonces el siguiente teorema:

**Teorema 1 (Fishburn 1984c).- Si en ($P^n$, > ) tenemos definida una relación de preferencias, las condiciones siguientes son equivalentes:**

**(i) se verifican los axiomas C, D, S, F1, F2 y F3**

**(ii) existen una funcional bilineal y hemisimétrica $\Phi : P^n x\, P^n \to \mathbb{R}$, y números $\pi_j \geq 0$ únicos ($\sum \pi_j = 1$ , $\pi_j = 0 \iff s_j$ es nulo) de manera que:**

$$\forall\ \bar{p},\bar{q} \in P^n \qquad \Phi(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\ \phi(p_j,q_j)$$

En el caso en que se den todas las hipótesis especificadas en los axiomas C, D, S, F1, F2 y F3, la valoración de las acciones-loterías resulta, pues, particularmente operativa. Nótese que $\phi$ valora prospects en cada estado del mundo como en la SSB original (Fishburn 1982); cuando $p_j$ y $q_j$ son degeneradas se tiene la regla de valoración como en la Regret Theory (Loomes & Sugden 1982) $\Phi(\bar{p},\bar{q}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \psi(x_{p_j}, x_{q_j})$, siendo $x_{p_j}$, $x_{q_j}$, los resultados ciertos asociados a las distribuciones degeneradas $p_j$, $q_j$, respectivamente.

En el marco de la teoría que estamos comentando, un elemento $\bar{p}$ de $P^n$ es maximal para la relación de preferencias cuando se cumple que $\Phi(\bar{p},\bar{q}) \geq 0$ para todo $\bar{q}$ en $P^n$. El resultado siguiente garantiza la existencia de elementos maximales *cuando nos movemos en la envoltura convexa de un conjunto finito de elementos en* $P^n$:

**Teorema (Fishburn, 1984a).- Sea el conjunto $P^n$ en el que tenemos definida una relación de preferencias que satisface los supuestos C,D,S. Entonces, para todo subconjunto finito $Q \subset P^n$, existe un elemento $\bar{p}*$ en $\mathcal{H}(Q)$ tal que $\bar{p}* \geq \bar{q}$, para todo $\bar{q} \in \mathcal{H}(Q)$, siendo $\mathcal{H}(Q)$ la envoltura convexa de Q.**

La prueba del teorema anterior proporciona, a su vez, un método para la obtención de $\bar{p}*$ como solución de un juego simétrico cuya matriz de pagos es la matriz hemisimétrica de valoración de los pares de elementos de Q.

## 3.- UNA APLICACION A LA ELECCION ENTRE ACTIVOS ARRIESGADOS

Comenzamos esta sección identificando, en el problema de la selección entre activos arriesgados, los diferentes tipos de entes que vamos a considerar, para posteriormente, proceder a su valoración en los términos de la teoría presentada en la sección anterior.

### 3.1.-Títulos, títulos elementales, carteras y mixturas.

Definiremos un título como un activo financiero que da derecho a la participación en los beneficios de una Compañía (que cotiza en Bolsa), de manera que al final de un determinado período de tiempo proporcionará, por unidad monetaria invertida, un rendimiento que dependerá de que se produzcan ciertos eventos que se entienden fuera del control del inversor.

**Definición 1.- El rendimiento se define como:**

$$r = \frac{\text{valor del título al final del período - valor al inicio + dividendos}}{\text{valor inicial}}$$

con lo que r será un número real.

La posibilidad de activos sin riesgo o con rendimiento fijo (independiente de los estados del mundo) como el ahorro en el Banco o los Bonos del Estado está incluída en el concepto general del título.

**Supuesto 1.-** Partiremos del supuesto de que el inversor es capaz de construir un sistema finito y exhaustivo (que puede ser simple o muy detallado) de estados del mundo excluyentes entre sí: $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, uno sólo de los cuales prevalecerá al fin del período considerado.

El rendimiento de un título para cada estado del mundo posible es una variable aleatoria. Se supondrá que la distribución de probabilidad de dicha variable aleatoria es conocida o estimada por el agente decisor.

Si se considera que para cada título $T_i$ hay un conjunto finito $X_i$ de resultados posibles, entonces cada $T_i$ viene representado por un n-vector de loterías, o dicho de otro modo, por una accion-lotería.

$$T_i = (p_1^i, p_2^i, \ldots p_n^i) \in P^n, \text{ donde } P = \{p:X_i \longrightarrow [0, 1]\}$$

Así, el título $T_i$ queda representado por una matriz cuyas columnas son loterías sobre el conjunto de resultados en cada estado del mundo.

Dado un conjunto finito de títulos: $T_1, T_2, \ldots, T_\ell$ cuyos respectivos conjuntos de resultados sean $X_1, \ldots, X_\ell$, considerando como soporte común $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_\ell$ es posible representar cada $T_i$ $(i=1,2,\ldots,\ell)$ definiendo los $p_j^i$ sobre X.

Si se sustituyen las distribuciones de probabilidad sobre los rendimientos de un título $T_i$ en cada estado del mundo por distribuciones degeneradas (vectores canónicos) que asocian un resultado cierto $x_{ij}$ a cada estado del mundo $s_j$ (valor central estimado como cierto), se obtiene una familia particular de títulos que llamaremos elementales.

**Definición 2.- LLamaremos título elemental a todo n-vector de loterías degeneradas, que asocia por tanto un resultado cierto a cada estado del mundo.**

LLamaremos $P^n_o \subset P^n$ al conjunto de títulos elementales.

Un título elemental se puede entonces representar por una acción, representación habitual en el tratamiento "clásico" del problema de valoración de títulos y selección de cartera.(Ver por ejemplo Ford (1983) o Sharpe (1970)).

**Definición 3.- Consideremos un título elemental $T_i$. Definimos una participación-$\lambda$ $P_\lambda(T_i)$ en $T_i$ como un nuevo vector de resultados estado-contingentes que proporciona en cada estado del mundo $s_j$ ($j=1,2...n$) los rendimientos $\lambda x_{ij}$, siendo $x_{ij}$ los rendimientos de $T_i$.**

Según la definición, $P_\lambda(T_i)$ corresponde a la inversión de $\lambda$ unidades monetarias en el título $T_i$. Si excluimos la posibilidad de venta de títulos exigiremos $\lambda \geq 0$ y así lo haremos en lo sucesivo.

**Definición 4.- Dados $\ell$ títulos elementales $T_1$, $T_2 \ldots$, $T_\ell$ definimos la suma de participaciones $S = P_{\lambda 1}(T_1) + P_{\lambda 2}(T_2) + \ldots + P_{\lambda \ell}(T_\ell)$ como la acción que proporciona el resultado $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{ij}$ en cada $s_j$.**

**Definición 5.- Dados $\ell$ títulos elementales $T_1$, $T_2$, ..., $T_\ell$ consideremos las participaciones $P_{\lambda 1}(T_1)$, $P_{\lambda 2}(T_2)$, ..., $P_{\lambda \ell}(T_\ell)$. Llamaremos cartera-$\bar{\lambda}$**

**$C(\bar{\lambda})$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, de los títulos $T_1, \ldots, T_\ell$ a toda participación simultánea en ellos (suma) que esté normalizada, esto es:**

$$C(\bar{\lambda}) = P_{\lambda 1}(T_1) + P_{\lambda 2}(T_2) + \ldots + P_{\lambda \ell}(T_\ell)$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0$$

Queda pues definida una cartera mediante inversión de una unidad monetaria distribuída en participaciones en los diferentes títulos elementales.

| | $s_1$ $\pi_1$ | $s_2$ $\pi_2$ | ... | $s_n$ $\pi_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | ... | $x_{1n}$ |
| $T_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | ... | $x_{2n}$ |
| $\vdots$ | | | | |
| $T_\ell$ | $x_{\ell 1}$ | $x_{\ell 2}$ | ... | $x_{\ell n}$ |
| $P_{\lambda 1}(T_1)$ | $\lambda_1 x_{11}$ | $\lambda_1 x_{12}$ | ... | $\lambda_1 x_{1n}$ |
| $P_{\lambda 2}(T_2)$ | $\lambda_2 x_{21}$ | $\lambda_2 x_{22}$ | ... | $\lambda_2 x_{2n}$ |
| $\vdots$ | | | | |
| $P_{\lambda \ell}(T_\ell)$ | $\lambda_\ell x_{\ell 1}$ | $\lambda_\ell x_{\ell 2}$ | ... | $\lambda_\ell x_{\ell n}$ |
| $C(\bar{\lambda})$ | $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{i1}$ | $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{i2}$ | ... | $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{in}$ |

Dados dos títulos elementales $T_1$, $T_2$, una combinación convexa de ellos $T = \lambda\, T_1 + (1-\lambda)T_2$ $\lambda \in [0,1]$, es un nuevo título no elemental $T = (p_1, p_2,$

$\dots,p_n)$, con $p_j = \lambda p_j^1 + (1-\lambda)p_j^2$ , para $j = 1, 2, \dots, n$. Tiene pues sentido hablar de la envoltura convexa de los títulos elementales. Dicha envoltura convexa estará integrada por las posibles ponderaciones probabilísticas de los títulos, por lo que damos la siguiente definición:

**Definición 6.- Dados los títulos elementales $T_1, T_2, \dots, T_\ell$, llamamos mixtura T de ellos a todo elemento de la envoltura convexa $\mathcal{H}(T_1,T_2,\dots,T_\ell)$.**

$$T = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i T_i \quad , \qquad \sum_{i=i}^{\ell} \lambda_i = 1 \quad , \qquad \lambda_i \geq 0 \ \forall i$$

$$\text{con } p_j = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_j^i \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

Es claro que las mixturas de títulos elementales (acciones) no son títulos elementales, sino acciones-loterías. Por otro lado una mixtura no es tampoco una cartera (una cartera es también una acción). No obstante, dada una mixtura de títulos elementales, podemos asociarle una cartera de la siguiente forma:

**Definición 7.- Sean $T_1, T_2, \dots, T_\ell$ títulos elementales. A partir de la mixtura**

$$T = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i T_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1 \ ; \ T_i \in P^n, \forall\ i$$

**definiremos la cartera $C(\bar{\lambda})$ deducida de T como:** $C(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{\ell} P_{\lambda i}(T_i)$

Siendo la mixtura T una ponderación probabilística de los títulos elementales $T_i$, la cartera asociada ha sido definida como una participación simultánea de $\lambda_i$ unidades monetarias en cada $T_i$. La idea base en la asociación mencionada consiste en tomar ponderaciones monetarias a partir de las ponderaciones probabilísticas de la mixtura.

Se tiene entonces la siguiente propiedad:

**Proposición 1.- Sea $T \in \mathcal{H}(T_1,...,T_\ell)$ una mixtura y construyamos la cartera asociada C. Entonces, para cualquier distribución de probabilidad que el agente asigne a los estados del mundo, $\pi_1,...,\pi_n$, con $\pi_j \geq 0$ para todo $j = 1,...,n$, $\sum \pi_j = 1$,**

**(i) T y C poseen la misma media.**

**(ii) La varianza de C es estrictamente menor que la varianza de T.**

Prueba:

(i) Inmediato, ya que asociada a la mixtura

$$T = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i T_i \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$$

se tiene la cartera

$$C(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\ell) = P_{\lambda 1}(T_1) + P_{\lambda 2}(T_2) + ... + P_{\lambda \ell}(T_\ell)$$

de modo que $E_T = E_C$.

(ii) Puesto que los respectivos momentos de segundo orden son:

$$m_c^2 = E_c^2 + \sigma_c^2 \qquad \text{(cartera)}$$

$$m_T^2 = E_T^2 + \sigma_T^2 \qquad \text{(mixtura)}$$

donde $\sigma_c^2$ y $\sigma_T^2$ son las varianzas respectivas, para probar que $\sigma_c^2 < \sigma_T^2$ bastará probar que $m_c^2 < m_T^2$. Comencemos considerando dos títulos:

| | $s_1$ | $s_2$ | ... | $s_j$ | ... | $s_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi_1$ | $\pi_2$ | ... | $\pi_j$ | ... | $\pi_n$ |
| $T_1$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_j$ | ... | $x_n$ |
| $T_2$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_j$ | ... | $y_n$ |
| $C(\lambda)$ | $\lambda x_1+(1-\lambda)y_1$ | $\lambda x_2+(1-\lambda)y_2$ | ... | $\lambda x_j+(1-\lambda)y_j$ | ... | $\lambda x_n+(1-\lambda)y_n$ |

$$T = \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$$

$$m_T^2 = \lambda\pi_1 x_1^2 + (1-\lambda)\pi_1 y_1^2 + \lambda\pi_2 x_2^2 + (1-\lambda)\pi_2 y_2^2 + \ldots + \lambda\pi_n x_n^2 + (1-\lambda)\pi_n y_n^2 =$$
$$= \lambda[\pi_1 x_1^2 + \pi_2 x_2^2 + \ldots + \pi_n x_n^2] + (1-\lambda)[\pi_1 y_1^2 + \pi_2 y_2^2 + \ldots + \pi_n y_n^2] =$$
$$= \lambda m_1^2 + (1-\lambda)m_2^2 \qquad \text{(I)}$$

donde $m_1^2$ es el momento de segundo orden de $T_1$

$m_2^2$ es el momento de segundo orden de $T_2$.

Para la cartera $C(\lambda)$ tendremos:

$$m_c^2 = \pi_i[\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1]^2 + \pi_2[\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2]^2 + \ldots + \pi_n[\lambda x_n + (1-\lambda)y_n]^2 =$$
$$= \lambda^2[\pi_1 x_1^2 + \pi_2 x_2^2 + \ldots + \pi_n x_n^2] + (1-\lambda)^2[\pi_1 y_1^2 + \pi_2 y_2^2 + \ldots + \pi_n y_n^2] + \alpha =$$
$$= \lambda^2 m_1^2 + (1-\lambda)^2 m_2^2 + \alpha \qquad \text{(II)}$$

donde $\alpha = 2\lambda(1-\lambda)[\pi_1 x_1 y_1 + \pi_2 x_2 y_2 + \ldots + \pi_n x_n y_n]$

de (I) y (II)

$$m_c^2 - m_T^2 = (\lambda^2 - \lambda)m_1^2 + \left[(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)\right]m_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)[\pi_1 x_1 y_1 + \pi_2 x_2 y_2 + \ldots +$$
$$\pi_n x_n y_n] = \lambda(\lambda-1)\left[m_1^2 + m_2^2 - 2(\pi_1 x_1 y_1 + \pi_2 x_2 y_2 + \ldots + \pi_n x_n y_n)\right]$$

como $\lambda(\lambda-1) < 0$, $0 < \lambda < 1$ se tendrá que $m_c^2 - m_T^2 < 0$ cuando $m_1^2 + m_2^2 > 2(\pi_1 x_1 y_1 + \pi_2 x_2 y_2 + \ldots + \pi_n x_n y_n)$, pero ello siempre se verifica puesto que:

$$m_1^2 + m_2^2 = \pi_1 x_1^2 + \pi_2 x_2^2 + \ldots + \pi_n x_n^2 + \pi_1 y_1^2 + \pi_2 y_2^2 + \ldots + \pi_n y_n^2 =$$

$$= \pi_1(x_1^2 + y_1^2) + \pi_2(x_2^2 + y_2^2) + \ldots + \pi_n(x_n^2 + y_n^2) = \pi_1[x_1-y_1]^2 + \pi_2[x_2-y_2]^2 + \ldots + \pi_n[x_n-y_n]^2 + 2\pi_1 x_1 y_1 + 2\pi_2 x_2 y_2 + \ldots + 2\,\pi_n x_n y_n.$$

así:

$$m_1^2 + m_2^2 - 2(\pi_1 x_1 y_1 + \pi_2 x_2 y_2 + \ldots + \pi_n x_n y_n) =$$
$$= \pi_1(x_1 - y_1)^2 + \pi_2(x_1 - y_2)^2 + \ldots + \pi_n(x_n - y_n)^2 > 0$$

por lo que $m_1^2 + m_1^2 > 2(\pi_1 x_1 y_1 + \ldots + \pi_n x_n y_n)$, y por tanto

$$\sigma_C^2 < \sigma_T^2$$

En general sean ahora $T_1, T_2 \ldots T_\ell$ para los que tendremos la mezcla $T = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i T_i$ y la cartera asociada $C(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{\ell} P_{\lambda i}(T_i)$

Consideremos $U = \sum_{i=1}^{\ell-1} \mu_i T_i$, $C(\mu) = \sum_{i=1}^{\ell-1} P_{\mu_i}(T_i)$

entonces: $T = \alpha\, U + (1-\alpha)T_\ell = \alpha \sum_{i=1}^{\ell-1} \mu_i T_i + (1-\alpha)T_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i\, T_i$ con $\lambda_i = \alpha\mu_i$, $i = 1, 2, \ldots (\ell-1)$; $\lambda_\ell = (1-\alpha)$

Para la cartera $C(\alpha)$ tendremos:

$C(\alpha) = P_\alpha(U) + P_{1-\alpha}(T_\ell)$ y, por el resultado anterior, $\sigma^2_{C(\alpha)} < \sigma^2_T$.

Pero $C(\alpha) = P_\alpha(C(\mu)) + P_{1-\alpha}(T_\ell) =$

$$P_\alpha \sum_{i=1}^{\ell-1} P_{\mu_i}(T_i) + P_{1-\alpha}(T_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell-1} P_{\alpha\mu_i}(T_i) + P_{1-\alpha}(T_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} P_\lambda\,(T_i) = C(\bar{\lambda}).$$

De modo que $\sigma^2_{C(\lambda)} < \sigma^2_T$. $\blacksquare$

## 3.2.- Valoración de títulos y carteras.

Nos planteamos ahora el problema de la valoración de títulos cualesquiera (no necesariamente elementales) por un agente decisor particular. Recordaremos brevemente algunos resultados clásicos.

En el caso de un agente VNM, cuya utilidad básica viene dada por la función $u:R \to \mathbb{R}_+$, éste valorará cada uno de los títulos $\mathbf{T}_i$ mediante la regla de la utilidad esperada, esto es, define una función $v(\mathbf{T}_i) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\, u(x_{ij})$, $i = 1,\ldots,\ell$, siendo $(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ las probabilidades asignadas a los estados del mundo. Este tipo de agente valorará las carteras de la siguiente manera: Una cartera $C(\lambda)$ es una lotería cuyos resultados, en cada estado del mundo $s_j$ vienen dados por $\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k x_{kj}$, $j=1,\ldots,n$. En este sentido, la valoración de un agente VNM de la cartera $C(\lambda)$ es, simplemente,

$$v[C(\lambda)] = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\, u[\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k x_{kj}]$$

Un resultado clásico es entonces que, si los títulos $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_\ell$ son indiferentes para el agente, y éste es averso al riesgo (u(.) estrictamente cóncava), la cartera $C(\lambda)$ es preferida a cualquiera de los títulos que la componen. Así, la aversión al riesgo aparece como una justificación de la diversificación entre títulos indiferentes. Por otra parte, si la función u es conocida, la cartera óptima se encuentra resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Max } v[C(\lambda)] \\ &\text{s.a. } \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k = 1 \end{aligned}$$

Una de las dificultades a la hora de resolver el problema de optimización anterior es la falta de algoritmos, salvo en el caso en que la función u tenga propiedades muy particulares. La literatura clásica sobre selección de cartera ha destinado una buena parte de sus esfuerzos al análisis de este problema en casos particulares que resulten operativos. El modelo más conocido es el denominado "media-varianza", presentado inicialmente por Tobin (1958), y que supone que *la valoración de una cartera es únicamente función de la media y la varianza de dicha cartera.* Ello supone que $v[C(\lambda)]$ puede expresarse como una función $F[E_{C(\lambda)},\sigma^2_{C(\lambda)}]$, donde $E_{C(\lambda)} = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \, [\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k x_{kj}]$, y $\sigma^2_{C(\lambda)} = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i\lambda_j \, \sigma_{ij}$, siendo $\sigma_{ij}$ la covarianza de los títulos $\mathbf{T}_i$, $\mathbf{T}_j$.

Para conseguir expresar la valoración de carteras mediante una función F que dependa sólo de la media y de la varianza de las mismas, hay que suponer bien que la utilidad básica es cuadrática, o alternativamente, que las distribuciones de probabilidad sobre los rendimientos de los títulos son distribuciones normales. Ambos supuestos han sido ampliamente criticados [véase Arrow (1965) (1971), Borch (1969), Feldstein (1969), Tobin 1969]. La valoración de carteras y títulos mediante la regla de la utilidad esperada supone el admitir unas propiedades específicas acerca de las preferencias del agente sobre el espacio de las loterías.

### 3.2.1.- Valoración de títulos y SSB. Un primer resultado de diversificación.

Vamos ahora a suponer que los agentes tienen definidas sus preferencias $\succsim$ sobre el conjunto de mixturas $\mathcal{H}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_\ell)$ de modo que se verifiquen los axiomas C, D, S, F1, F2, y F3 (Fishburn (1984bc). En tal caso, sabemos que existen una funcional bilineal hemisimétrica

$$\Phi\colon \mathcal{H}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_\ell)\times\mathcal{H}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_\ell) \to \mathbb{R}$$

y números $(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ no negativos, cuya suma es 1, y que podemos identificar con las probabilidades que el agente asigna a los estados del mundo, de tal forma que $\forall\ \mathbf{T},\mathbf{U} \in \mathcal{H}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_\ell)$

$$\Phi(\mathbf{T},\ \mathbf{U}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\ \phi(p_j,q_j)$$

siendo $\mathbf{T} = (\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)$, $\mathbf{U} = (\ q_1,\ q_2,\ldots q_n)$. En tal caso,

$$\mathbf{T} \succsim \mathbf{U} \iff \Phi(\mathbf{T},\ \mathbf{U}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\ \phi(p_j,\ q_j) \geq 0$$

La bilinealidad de $\Phi$ permite calcular $\Phi(\mathbf{T},\mathbf{U})$ en función de la valoración de las parejas de rendimientos de los títulos $\mathbf{T}_1,\ldots\mathbf{T}_\ell$: Llamemos $[\psi]$ a una matriz $\ell\times\ell$ tal que $\psi_{ik}= \Phi(T_i,T_k)$, $i,k = 1,\ldots,\ell$. Entonces,

$$\Phi(\mathbf{T},\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_i\mu_k \psi_{ik} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)[\psi](\mu_1,\ldots,\mu_\ell)'$$

siendo $\mathbf{T} = \lambda_1\mathbf{T}_1 +\ldots+\lambda_\ell\mathbf{T}_\ell$ y $\mathbf{U} = \mu_1\mathbf{T}_1 +\ldots+ \mu_\ell\mathbf{T}_\ell$ .

Por otro lado, para las parejas de títulos elementales, se tiene que

$$\mathbf{T}_i \gtrsim \mathbf{T}_k \iff \Phi(\mathbf{T}_i,\ \mathbf{T}_k) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\ \psi(x_{ij},\ x_{kj}) \geq 0$$

donde $x_{ij}$ es el resultado asociado a la acción (título) $\mathbf{T}_i$ en el estado del mundo $s_j$. Así, las probabilidades asociadas a los estados del mundo, permiten ponderar las valoraciones relativas de resultados para títulos alternativos, mientras que las "probabilidades" asociadas a los diferentes títulos elementales, cuando nos movemos en la envoltura convexa $\mathcal{H}(\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_\ell)$, permiten ponderar las valoraciones relativas de parejas de títulos elementales para valorar mixturas.

Consideremos entonces el problema de decisión con que se enfrenta un agente, ante el cual se presentan un conjunto finito de opciones arriesgadas, dadas por los títulos elementales $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_\ell$. Supongamos que se da el caso de que dichos títulos resultan ser, para el agente, indiferentes dos a dos, esto es $\Phi(T_i,T_k) = 0$ para todo $i,k =1,\ldots,\ell$. Consideremos una cartera $C(\overline{\lambda})$, construída a partir de dichos títulos, Entonces: $C(\bar{\lambda}) \gtrsim T_s \iff \sum_{j=1} \pi_j \ \psi\left[\sum_{r=1} \lambda_r x_{rj},\ x_{sj}\right] \gtrsim 0$. Además, dadas dos carteras,

$$C(\bar{\lambda}) \geq C(\bar{\mu}) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \pi_k \psi \left[ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{ik} ,\ \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_{ik} \right] \geq 0$$

En estas circunstancias, si se conoce la funcional $\psi$ que valora las parejas de resultados, es fácil comparar carteras alternativas, si bien no es posible encontrar, en general, la cartera óptima.

No obstante, es posible obtener un primer resultado de diversificación que tiene interés:

**Proposición 2.- Si la funcional $\psi$ es estrictamente cóncava en el primer argumento, y los títulos $T_1,\ldots,T_\ell$ son indiferentes, cualquier cartera $C(\lambda)$ es estrictamente preferida a cualquiera de los mencionados títulos.**

<u>Prueba:</u>

$$C(\lambda) > T_s \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \pi_k \ \psi\left[ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{ik} ,\ x_{sk} \right] > 0$$

Supuesta $\psi$ cóncava estricta en el primer argumento,

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_k \psi \left[ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_{ik} ,\ x_{sk} \right] > \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \ \sum_{k=1}^{n} \pi_k \psi \ (x_{ik}, x_{sk})$$

pero el segundo miembro es una combinación convexa de ceros, ya que $T_i$ es indiferente a $T_s$, cualquiera que sean i,s $=1,\ldots,\ell$, por lo que, efectivamente, $C(\lambda)$ es estrictamente preferida a cada $T_s$. ■

El resultado de la Proposición 2 merece algún comentario. Nótese que la concavidad de $\psi$ en el primer argumento puede provenir de diversas causas: puede ser debida a que el agente es averso al riesgo, en cuyo caso la función de utilidad básica es cóncava, y esta concavidad puede ser heredada por la funcional $\psi$. Pero también puede provenir del sentimiento de arrepentimiento/regocijo con el que se modifica la utilidad básica, de tal forma que, agentes neutros al riesgo, pero con un determinado tipo de temperamento, preferirían diversificar su inversión entre activos indiferentes antes que invertir en uno solo de dichos activos. Así, la proposición 2 se puede entender como una extensión del resultado clásico de diversificación dando un esquema explicativo más completo. Nótese que al vincular la actitud frente al riesgo a la forma de la utilidad básica u(x) sobre los resultados ciertos, si $\psi(x,y) = f(u(x),u(y))$, entonces la concavidad en la primera componente puede darse en agentes neutrales al riesgo cuando $\delta^2 f/\delta u^2 < 0$ lo que se asociaría a una actitud de arrepentimiento/regocijo. Por otra parte, esta misma actitud temperamental podría determinar que agentes aversos al riesgo no diversificaran cuando $\delta^2 f/\delta u^2 > 0$.

### 3.3.- Valoración de mixturas. Diversificación por ciclos: Mixtura ideal y cartera recomendada.

Dados los títulos elementales, y puesto que las preferencias de nuestro agente no son necesariamente transitivas, puede darse el caso de que, al compararlos, aparezcan ciclos. Si esta es la situación, al disponer de una regla de valoración bilineal hemisimétrica sobre el conjunto $\mathcal{H}(\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_\ell)$, podemos encontrar un elemento óptimo entre las mixturas. Este hecho nos conduce a elegir una cartera determinada (de cómputo sencillo), como *recomendación* al agente que presenta ciclos en las preferencias entre títulos elementales. En efecto, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.- Si el agente decisor presenta ciclos en las preferencias entre títulos elementales, es posible encontrar un elemento T* $\in$ $\mathcal{H}(T_1,\ldots,T_\ell)$, de tal forma que T* $\geq$ $T_i$, para todo $i=1,\ldots,\ell$. Asociada a la mixtura T* = ($\lambda$*), (mixtura ideal), podemos definir (y recomendar) la cartera C($\lambda$*).**

Prueba

La existencia de **T*** se deriva directamente del teorema 1 (Fishburn, 1984a). En dicha prueba se proporciona, asimismo, un método de cómputo de la mixtura ideal, como solución de un juego simétrico, cuya matriz de pagos es la matriz hemisimétrica de valoración de los pares de títulos elementales.

Llamaremos título o mixtura IDEAL al título **T*** que resulte de resolver el mencionado problema. Esta mixtura o título ideal es una acción-lotería: no es, por tanto, una cartera. No obstante, asociada al título **T*** (que es una lotería sobre los títulos $T_1,\ldots,T_\ell$, con probabilidades $\lambda^*_1,\ldots,\lambda^*_\ell$, podemos construir la cartera C($\lambda$*), que distribuye cada unidad monetaria en participaciones $\lambda^*_1,\ldots,\lambda^*_\ell$ en los títulos $T_1,\ldots,T_\ell$, respectivamente. La racionalidad de tal recomendación descansa en la Proposición 1 que garantiza que C($\lambda$*) conserva el valor esperado del título ideal y posee menor varianza. $\blacksquare$

Siendo $C(\lambda^*)$ una alternativa accesible al agente, podría éste enfrentarla a los títulos disponibles. Si $C(\lambda^*)$ es preferida, invertir en ella será sin duda una buena elección. Si algún $T_i$ fuera preferido a esta cartera, no habría dificultad en repetir el proceso generando un nuevo título ideal y una nueva cartera recomendada y así sucesivamente. Investigar la convergencia del proceso y las propiedades de las carteras generadas en cada iteración es un problema abierto en el que seguimos trabajando.

## 4.-COMENTARIOS FINALES.

En este trabajo hemos abordado el problema de la valoración de activos arriesgados desde una perspectiva diferente de la tradicional. La elección del marco de la valoración de Fishburn (1984b,c) de las acciones-loterías permite enfrentar el problema de decisión en un contexto de mayor riqueza conceptual y computacional. Este marco teórico resulta compatible con la incorporación, en la valoración del agente, de sentimientos psicológicos que modifican la mera evaluación de los resultados. Se tiene así una teoría normativa capaz de sustentar algunas de las teorías descriptivas más usuales, como es el caso de la Teoría del arrepentimiento de Loomes y Sugden (1982).

Dos son los resultados básicos ofrecidos: en primer lugar, una extensión del resultado tradicional de diversificación ante títulos indiferentes, explicado ahora por razones que pueden ser diferentes de la aversión explícita al riesgo. En segundo lugar, se enfrenta el problema de la elección en el caso de que la valoración de los títulos conduzca a un ciclo. En este caso, se proporciona una solución *recomendada* al problema de decisión, sugiriendo al agente una cartera que resulta tener la misma media y menor varianza que un *título ideal*, ente no disponible en el mercado, y que sería preferido por el agente a cualquiera de los títulos del ciclo en cuestión.

Admitir la posible presencia de ciclos en las preferencias supone una notable separación de la teoría tradicional. No obstante, la evidencia empírica indica claramente que en el tratamiento de los problemas de decisión en condiciones de riesgo, las hipótesis de la utilidad esperada resultan particularmente estrechas. Pensamos que la introducción de teorías alternativas, que permitan un rango de comportamiento más amplio para los agentes, pero que conserven las características deseables de operatividad, pueden dar algunas respuestas satisfactorias a la cantidad de problemas abiertos en éste área. Este trabajo no pretende ser más que un modesto paso en esta dirección.

**REFERENCIAS**

BORCH, K.(1969). "A note on uncertainty and indifference curves". *Review of Economic Studies.* 36, pp. 1-4.

FELDSTEIN, M. (1969). "Mean-variance Analysis in the Theory of liquidity preference and portfolio selection". *Review Economic Studies,* 36, pp. 5-12.

FISHBURN, P.C. (1982). "Nontransitive Measurable Utility". *Journal of Mathematical Psychology,* nº 26, pp. 31-67.

FISHBURN, P.C. (1984a). "Dominance in S.S.B. Utility Theory". *Journal of Economic Theory,* nº 34, pp. 130-148.

FISHBURN, P.C. (1984b). "S.S.B. Utility Theory: An Economic Perspective". *Mathematical Social Sciences,* nº 8, pp. 63-94.

FISHBURN, P.C. (1984c). "S.S.B. Utility Theory and Decision-Making under Uncertainty". *Mathematical Social Sciences,* nº 8, pp. 253-285.

FORD, J.L.(1983). *Choice, Expectation and Uncertainty: An Appraisal of G.L.S. Shackle's Theory.* Martin Roberston (Oxford).

LOOMES, G. & SUGDEN, R. (1982). "Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty". *The Economic Journal,* 92, pp. 805-824.

LOOMES, G. & SUGDEN R. (1987). "Some Implications of a more General Form of Regret Theory". *Journal of Economic Theory,* 41, pp. 270-287.

SHARPE, P. (1970). *Teoria de Cartera y Mercado de Capitales.* Deusto S.A. Bilbao 1974.

SHEFRIN H.& M. STATMAN (1990) "Equilibrium Implications of Regret Theory: Aplications to Pricing Regularities. Investment Advisers, and Money Management." Santa Clara University. Mímeo.

SIRVENT, R.& TOMAS, J. (1992a). "Una versión de Regret Theory: Aplicación a la Demanda de Seguro." *Investigaciones Económicas (Segunda Época),* Vol XVI, n. 1, pp. 43-72.

SIRVENT, R.& TOMAS, J.(1992b). "Una nota sobre utilidad expandida: Indice temperamental Tau". Mimeo .Universidad de Alicante.

TOBIN, J. (1958). "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies*, 25, pp.65-86.

VON NEUMANN, J. & MORGENSTERN, O. (1944). *The Teory of Games and Economic Behviour,* Princeton University Press.

## APENDICE 1.- EJEMPLO

Considérense disponibles tres títulos $T_1$, $T_2$ y $T_3$ de manera que: $T_1$ proporciona un rendimiento cierto del 16,3 %.

Se estima que el rendimiento de $T_2$ será del 29,3 % si se produce un determinado evento A, y del 5,2 % en otro caso.

El rendimiento de $T_3$ dependerá de que se produzcan o no los eventos compatibles A y B de modo que: si se realizan ambos, el rendimiento será del 22,5 % y si se realiza A pero no B, del 29,3 %. Para los sucesos $\bar{A} \cap B$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$, los rendimientos respectivos son 0 % y 22,5 %.

Para representar los títulos partiremos de los cuatro estados del mundo:

$$s_1 = A \cap B \qquad s_2 = A \cap \bar{B} \qquad s_3 = \bar{A} \cap B \qquad s_4 = \bar{A} \cap \bar{B}$$

cuyas probabilidades serán:

$$\pi_1 = 0{,}30 \qquad \pi_2 = 0{,}19 \qquad \pi_3 = 0{,}33 \qquad \pi_4 = 0{,}18$$

| | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_1 = 0$ | | | | |
| $r_2 = 0{,}052$ | | | | |
| $r_3 = 0{,}163$ | | | | |
| $r_4 = 0{,}225$ | | | | |
| $r_5 = 0{,}293$ | | | | |

Así tendremos:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = (p_1^1\ p_2^1\ p_3^1\ p_4^1) \quad T_2 = (p_1^2\ p_2^2\ p_3^2\ p_4^2) \quad T_3 = (p_1^3\ p_2^3\ p_3^3\ p_4^3)$$

a) Valoración de $T_1$ frente a $T_2$

$$\Phi(T_1,\ T_2) = \sum_{j=1}^{4} \pi_j\ \phi(p_j^1,\ p_j^2)$$

$$T_1 \gtrsim T_2 \iff \Phi(T_1, T_2) \geq 0$$

$$\phi(p_1^1,p_1^2)=(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ )[\psi]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\psi(r_3,r_5)=\psi(0{,}163,\ 0{,}293)$$

$$\phi(p_2^1,\ p_2^2) = \psi(0.163,\ 0.293)$$

$$\phi(p_3^1,\ p_3^2) = \phi(p_4^1,\ p_4^2) =$$

$$= (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ )[\psi]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \psi(r_3,r_2) = \psi(0.163,\ 0.052)$$

de modo que:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1 \gtrsim T_2 \iff (0.30+0.19)\psi(0.163,\ 0.293) + \\ \qquad + (0.33+0.18)\psi(0.163,\ 0.052) \geq 0 \end{array}}$$

b) <u>Valoración de $T_1$ frente a $T_3$</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1 \gtrsim T_3 \iff (0.30+0.18)\psi(0.163,\ 0.225) + \\ + 0{,}19\ \Psi(0.163,\ 0.293) + 0.33\ \Psi(0.163,\ 0) \geq 0 \end{array}}$$

c) Valoración de $T_2$ frente a $T_3$

$$\boxed{T_2 \succsim T_3 \iff 0.30\,\psi(0.293, 0.225) + +0.33\,\psi(0.052, 0) + 0.18\,\psi(0.052, 0.225) \geq 0}$$

Supongamos ahora que el agente tiene una utilidad cuadrática sobre el rendimiento

$$u(r) = -r^2 + 2r \qquad r \leq 1$$

En lugar de la tabla de rendimientos:

| | 0.30 | 0.19 | 0.33 | 0.18 |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0.163 | 0.163 | 0.163 | 0.163 |
| $T_2$ | 0.293 | 0.293 | 0.052 | 0.052 |
| $T_3$ | 0.225 | 0.293 | 0 | 0.225 |

TABLA I

utilizaremos la tabla de las $u(r_i)$

| | 0.30 | 0.19 | 0.33 | 0.18 |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0.2994 | 0.2994 | 0.2994 | 0.2994 |
| $T_2$ | 0.5001 | 0.5001 | 0.1013 | 0.1013 |
| $T_3$ | 0.3994 | 0.5001 | 0 | 0.3994 |

TABLA II

Para la valoración de los rendimientos, tomaremos:

$$\psi(r_i, r_j) = [u(r_i) - u(r_j)]e^{-[u(r_i)-u(r_j)]}$$

$$\text{con} \quad r_i \geq r_j \quad y \quad \psi(r_j, r_i) = - \psi(r_i, r_j)$$

Esta función, en nuestra versión "expandida" de la Regret Theory (Sirvent & Tomás (1992a) corresponde a un agente "tibio" frente al éxito-fracaso y explícitamente averso al riesgo:

llamando $\xi = u(r_i) - u(r_j)$ se tiene que

$$\psi(\xi) = \xi H(\xi)$$

$$H(\xi) = e^{-|\xi|} \quad \forall \ \xi$$

Con ello obtenemos:

$$\Phi(T_1, T_2) = 0.49 \ \psi(-0.2007) + 0.51 \ \psi(0.1981) =$$

$$= 0.49(-0.16420) + 0.51(0.16249) = 0.00241 > 0$$

por lo que $T_1 > T_2$.

$$\Phi(T_1, T_3) = 0.48 \ \psi(-0.1) + 0.19 \ \psi(-0.2007) + 0.33 \ \Psi(0.2994) =$$

$$= 0.48(-0.09048) + 0.19(-0.16420) + 0.33(0.22193) =$$

$$= - 0.00139 < 0$$

$$T_3 > T_1$$

$$\Phi(T_2, T_3) = 0.30\ \psi(0.1007) + 0.19\ \psi(0) + 0.33\ \psi(0.1013) +$$

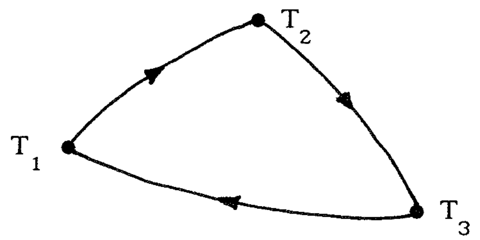
$$0.18\ \psi(-0.2981) =$$

$$= 0.30(0.09105) + 0.33(0.09154) + 0.18(-0.22126) =$$

$$= 0.01769 > 0$$

$$T_2 > T_3$$

En consecuencia, las preferencias resultan cíclicas.




Obsérvese que la aversión explícita al riesgo es irrelevante para que las preferencias resulten cíclicas. Puede tomarse u(r)=r y tomar la TABLA II como tabla de rendimientos.

El Teorema de Fishburn (1984a) garantiza la existencia de una mixtura $T^* \in H(T_1, T_2, T_3)$ de manera que $T^* \succsim T_i \quad \forall T_i \in H(T_1, T_2, T_3)$.

El Teorema proporciona además, un método para determinar $T^*$ como solución del juego bipersonal simétrico de matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.00241 & -0.00139 \\ -0.00241 & 0 & 0.01769 \\ 0.00139 & -0.01769 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\lambda_1^* = 0.8232$$

$$\lambda_2^* = 0.0647$$

$$\lambda_3^* = 0.1121$$

correspondiente a la mixtura o "título ideal"

$$T^* = 0.8232\ T_1 + 0.0647\ T_2 + 0.1121\ T_3$$

$$T^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1121 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0647 & 0.0647 \\ 0.8232 & 0.8232 & 0.8232 & 0.8232 \\ 0.1121 & 0 & 0 & 0.1121 \\ 0.0647 & 0.1768 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La cartera $C(\lambda^*)$ asociada a $T^*$, correspondiente a la inversión de 0.8232 u.m. en $T_1$, 0.0647 en $T_2$ y 0.1121 en $T_3$, tiene la misma esperanza que $T^*$ y varianza menor:

La cartera $C(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$ es la "recomendada" dadas las preferencias del agente:

82.32% en $T_1$

6.47 % en $T_2$

11.21 % en $T_3$

Los rendimientos de la cartera $C(\lambda^*)$, en cada estado del mundo son: (0.1784, 0.1860, 0.1375, 0.1628). Es fácil comprobar cómo, en este caso, la cartera es estrictamente preferida a cada uno de los títulos $T_i$ (i=1,2,3). Además se tiene:

| | ESPERANZA | VARIANZA |
|---|---|---|
| $T_1$ | 0.1630 | 0 |
| $T_2$ | 0.1701 | 0.0145 |
| $T_3$ | 0.1637 | 0.0138 |
| $C(\lambda^*)$ | 0.1635 | 0.0004 |

por lo que la opción de invertir en $C(\lambda^*)$ es una "buena recomendación".

## DOCUMENTOS PUBLICADOS

WP-EC 90-01 "Los determinantes de la evolución de la productividad en España"
M. Mas, F. Pérez. Diciembre 1990.

WP-EC 90-02 "Mecanización y sustitución de factores productivos en la Agricultura Valenciana"
A. Picazo, E. Reig. Diciembre 1990.

WP-EC 90-03 "Productivity in the service sector"
H. Fest. Diciembre 1990.

WP-EC 90-04 "Aplicación de los modelos de elección discreta al análisis de la adopción de innovaciones tecnológicas. El caso del sector azulejero"
E.J. Miravete. Diciembre 1990.

WP-EC 90-05 "Rentabilidad y eficiencia del mercado de acciones español"
A. Peiró. Diciembre 1990.

WP-EC 90-06 "La coordinación de políticas fiscales en el marco de una unión económica y monetaria"
J.E. Boscá, V. Orts. Diciembre 1990.

WP-EC 91-01 "Medición de la segregación ocupacional en España: 1964-1988"
M. Sánchez. Mayo 1991.

WP-EC 91-02 "Capital Adequacy in the New Europe"
E.P.M. Gardener. Mayo 1991.

WP-EC 91-03 "Determinantes de la renta de los hogares de la Comunidad Valenciana. Una aproximación empírica."
M.L. Molto, C. Peraita, M. Sánchez, E. Uriel. Mayo 1991.

WP-EC 91-04 "Un Modelo para la Determinación de Centros Comerciales en España".
A. Peiró, E. Uriel. Septiembre 1991.

WP-EC 91-05 "Exchange Rate Dynamics. Cointegration and Error Correction Mechanism".
M.A. Camarero. Septiembre 1991.

WP-EC 91-06 "Aplicación de una Versión Generalizada del Lema de Shephard con Datos de Panel al Sistema Bancario Español".
R. Domenech. Septiembre 1991.

WP-EC 91-07 "Necesidades, Dotaciones y Deficits en las Comunidades Autónomas"
B. Cabrer, M. Mas, A. Sancho. Diciembre 1991.

WP-EC 91-08 "Un Análisis del Racionamiento de Crédito de Equilibrio"
J. Quesada. Diciembre 1991.

WP-EC 91-09 "Cooperación entre Gobiernos para la Recaudación de Impuestos Compartidos"
G. Olcina, F. Pérez. Diciembre 1991.

WP-EC 91-10 "El impacto del Cambio Tecnológico en el Sistema Bancario: El Cajero Automático"
J. Maudos. Diciembre 1991.

WP-EC 91-11 "El Reparto del Fondo de Compensación Interterritorial entre las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 91-12 "Sobre la Distribución Justa de un Pastel y su Aplicación al Problema de la Financiación de las Comunidades Autónomas"
C. Herrero, A. Villar. Diciembre 1991.

WP-EC 92-01 "Asignaciones Igualitarias y Eficientes en Presencia de Externalidades"
C. Herrero, A. Villar. Abril 1992.

WP-EC 92-02 "Estructura del Consumo Alimentario y Desarrollo Economico"
E. Reig. Abril 1992.

WP-EC 92-03 "Preferencias de Gasto Reveladas por las CC.AA."
M. Mas, F. Pérez. Mayo 1992.

WP-EC 92-04 "Valoración de Títulos con Riesgo: Hacia un Enfoque Alternativo"
R.J. Sirvent, J. Tomás. Junio 1992.

WP-EC 92-05 "Infraestructura y Crecimiento Económico: El Caso de las Comunidades Autónomas"
A. Cutanda, J. Paricio. Junio 1992.

WP-EC 92-06 "Evolución y Estrategia: Teoría de Juegos con Agentes Limitados y un Contexto Cambiante"
F. Vega Redondo. Junio 1992.